

N° D'ORDRE :

1476.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. C. NICOLAU

1^{re} THÈSE. — SUR LA VARIATION DANS LE MOUVEMENT DE LA LUNE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 24 juin 1912, devant la Commission d'examen.

MM. H. POINCARÉ, *Président.*

ANDOYER,

P. PUISEUX.

} *Examineurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1912

N° D'ORDRE :

1476.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

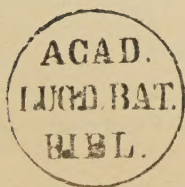
PAR M. C. NICOLAU.

1^{re} THÈSE. — SUR LA VARIATION DANS LE MOUVEMENT DE LA LUNE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 24 juin 1912, devant la Commission d'examen.

MM. H. POINCARÉ, *Président.*
ANDOYER, }
P. PUISEUX, } *Examineurs.*



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1912

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

MM.

Doyen	P. APPELL, professeur.	Mécanique rationnelle.
Doyen honoraire	G. DARBOUX.....	Géométrie supérieure.
Professeurs honoraires ...	{ CH. WOLF. RIBAN.	
	LIPPMANN.....	Physique.
	BOUTY.....	Physique.
	BOUSSINESQ.....	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ.....	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
	GASTON BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	KOENIGS.....	Mécanique physique et expérimentale.
	VELAIN.....	Géographie physique.
	GOURSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CHATIN.....	Histologie.
	HALLER.....	Chimie organique.
	JOANNIS.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	P. JANET.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
Professeurs	WALLERANT.....	Minéralogie.
	ANDOYER.....	Astronomie physique.
	PAINLEVÉ.....	Mathématiques générales.
	HAUG.....	Géologie.
	HOUSSAY.....	Zoologie.
	H. LE CHATELIER...	Chimie.
	GABRIEL BERTRAND...	Chimie biologique.
	M ^{me} P. CURIE.....	Physique générale.
	CAULLERY.....	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ.....	Chimie appliquée.
	G. URBAIN.....	Chimie.
	EMILE BOREL.....	Théorie des fonctions.
	MARCHIS.....	Aviation.
	JEAN PERRIN.....	Chimie physique.
	G. PRUVOT.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
	MATRUCHOT.....	Botanique.
	ABRAHAM.....	Physique.
	N.....	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	N.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	PUISEUX.....	Mécanique et Astronomie.
	LEDUC.....	Physique.
	MICHEL.....	Minéralogie.
	HÉROUARD.....	Zoologie.
	LÉON BERTRAND.....	Géologie.
Professeurs adjoints	RÉMY PERRIER.....	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	MOLLIARD.....	Physiologie végétale.
	COTTON.....	Physique.
	LESPIEAU.....	Chimie.
	GENTIL.....	Pétrographie.
	SAGNAC.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
	PEREZ.....	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Secrétaire	D. TOMBECK.	

A

MON ILLUSTRE MAITRE

MONSIEUR H. POINCARÉ,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE FRANÇAISE ET DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Hommage de reconnaissance.

C. NICOLAU.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41556008_0035

PREMIÈRE THÈSE

SUR LA VARIATION

DANS LE

MOUVEMENT DE LA LUNE

Ce travail a eu pour objet une étude analytique des inégalités variationnelles de la Lune, afin de faire un premier pas dans le sens indiqué par Hill dans ses *Researches in the Lunar Theory* ⁽¹⁾ (Introd. *in fine*). En ses Parties essentielles il renferme :

Recherche de nouveaux développements définissant la *variation*, l'inégalité principale.

Limite de leur convergence.

Limite supérieure des coefficients des inégalités secondaires.

Examen de la nature des singularités.

I.

On sait comment, dans le Mémoire que nous venons de citer, Hill a posé, pour le résoudre, le problème des trois corps. Sa solution parti-

⁽¹⁾ *American Journal of Mathematics*, t. 1.

culière, qui est une solution périodique de la première sorte, lui a permis non seulement de définir très exactement la variation de la *vraie* Lune, mais encore d'étendre son étude à toute une classe de satellites. On se rappelle aussi que, dans le système d'axes tournant autour du centre de la Terre pris comme origine, cette solution représente les coordonnées x, y du centre de la Lune en fonction de $n =$ moyen mouvement de la Lune, $n' =$ moyen mouvement du Soleil, $\mu =$ somme des masses de ces astres mesurées par les vitesses que ces masses produisent dans l'unité de temps à l'unité de distance, et t_0 qui est l'époque du passage par l'axe des x , ou bien, puisque cet axe est constamment dirigé vers le Soleil, l'époque d'une conjonction initiale. Cette dernière quantité ne rentre d'ailleurs dans les coordonnées de la Lune que par leurs arguments qui sont des multiples *pairs* de l'argument de Delaunay

$$\tau = (n - n')(t - t_0).$$

Pour commencer, nous partons des équations différentielles du mouvement de la Lune idéale de Hill, équations créées par M. Poincaré dans sa *Mécanique céleste* (t. II, 2^e Partie, n° 327). C'est là un choix qui s'imposait en raison du nouveau paramètre p qui les rend plus générales et qui devait être pour nous un précieux moyen dans tout ce travail.

Ainsi, avec le changement de variables complexes,

$$x + iy = u, \quad x - iy = s,$$

et τ pris comme variable indépendante, ces équations peuvent s'écrire

$$(1) \quad \begin{cases} us'' - 2pius' + \frac{u's'}{2} - \frac{9}{4}p^2us = \frac{m^2}{8}(15u^2 + 3s^2) + C, \\ su'' + 2pisu' + \frac{u's'}{2} - \frac{9}{4}p^2us = \frac{m^2}{8}(15s^2 + 3u^2) + C, \end{cases}$$

où $m = \frac{n'}{n - n'}$, C étant la constante des forces vives; et pour avoir les équations de Hill on y fera $p = m$.

Maintenant, en appliquant les opérateurs

$$D = \zeta \frac{d}{d\zeta} = -i \frac{d}{d\tau}, \quad \text{où} \quad \zeta = e^{i\tau},$$

le nombre e étant la base des logarithmes népériens, les équations se

ramènent aux suivantes :

$$\begin{aligned} u D^2 s - 2 p u D s + \frac{D u D s}{2} + \frac{9}{4} p^2 u s + \frac{m^2}{8} (15 u^2 + 3 s^2) &= -C, \\ s D^2 u + 2 p s D u + \frac{D u D s}{2} + \frac{9}{4} p^2 u s + \frac{m^2}{8} (15 s^2 + 3 u^2) &= -C, \end{aligned}$$

d'où, par addition et soustraction,

$$\begin{aligned} u D^2 s + s D^2 u - 2 p (u D s - s D u) + D u D s + \frac{9}{2} p^2 u s + \frac{9}{4} m^2 (u^2 + s^2) &= -2C, \\ u D^2 s - s D^2 u - 2 p (u D s + s D u) &+ \frac{3}{2} m^2 (u^2 - s^2) = 0, \end{aligned}$$

ou bien encore

$$(2) \quad \begin{cases} D^2 (us) - D u D s - 2 p (u D s - s D u) + \frac{9}{2} p^2 u s + \frac{9}{4} m^2 (u^2 + s^2) = C, \\ D (u D s - s D u - 2 p u s) &+ \frac{3}{2} m^2 (u^2 - s^2) = 0, \end{cases}$$

en changeant $-2C$ en $C = \text{const.}$; et les équations sont ainsi ramenées à la forme des équations imaginaires de Hill.

Mais d'après la solution de Hill, qui peut s'écrire

$$u = \sum_i a_i \zeta^{2i+1}, \quad s = \sum_i a_{-i-1} \zeta^{2i+1}$$

avec $|i| = 0, 1, 2, \dots, \infty$, nous avons

$$\begin{aligned} u^2 &= \sum_j \left(\sum_i a_i a_{-i+j-1} \right) \zeta^{2j}, & s^2 &= \sum_j \left(\sum_i a_i a_{-i-j-1} \right) \zeta^{2j}, \\ us &= \sum_j \left(\sum_i a_i a_{i-j} \right) \zeta^{2j}, \\ D u D s &= - \sum_j \left[\sum_i (2i+1)(2i-2j+1) a_i a_{i-j} \right] \zeta^{2j}, \\ u D s - s D u &= -2 \sum_j \left[\sum_i (2i-j+1) a_i a_{i-j} \right] \zeta^{2j}, \end{aligned}$$

où j doit recevoir, comme i , toutes les valeurs entières, y compris zéro,

de $-\infty$ à $+\infty$. Il s'agit maintenant de substituer ces expressions dans les équations (2); et cela fait, on arrive, en égalant à zéro le coefficient de ζ^{2j} dans chacune de ces équations, aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_i \left[(2i+1)(2i-2j+1) + 4j^2 + \frac{9}{2}p^2 + 4p(2i-j+1) \right] a_i a_{i-j} \\ + \frac{9}{4}m^2 \sum_i (a_i a_{-i+j-1} + a_i a_{-i-j-1}) = 0, \\ 4j \sum_i [(2i-j+1) + p] a_i a_{i-j} - \frac{3}{2}m^2 \sum_i (a_i a_{-i+j-1} - a_i a_{-i-j-1}) = 0, \end{aligned}$$

où la valeur $j=0$ sera exclue, car le coefficient de ζ^0 donne la constante C.

De plus, après avoir multiplié la première par 2 et la seconde par 3, ces relations deviendront, par addition et soustraction,

$$\begin{aligned} \sum_i \{ 2(4i^2 + 4i + 1) \\ + 4(5j^2 - 4j - 8ij) \\ + [9p^2 + 4(4i - 5j + 2)p] \} a_i a_{i-j} + 9m^2 \sum_i a_i a_{-i+j-1} = 0, \\ \sum_i \{ 2(4i^2 + 4i + 1) \\ - 4(j^2 - 2j - 4ij) \\ + [9p^2 + 4(4i + j + 2)p] \} a_i a_{i-j} + 9m^2 \sum_i a_i a_{-i-j-1} = 0. \end{aligned}$$

En suivant plus loin le procédé de Hill, on arrive à remplacer ces deux relations par une formule unique. Mettons en effet en évidence les termes correspondant à $i=0$ et $i=j$; les relations s'écriront sous la forme

$$\begin{aligned} A a_0 a_{-j} + B a_0 a_j + \sum_i C a_i a_{i-j} + 9m^2 \sum_i a_i a_{-i+j-1} = 0, \\ A' a_0 a_{-j} + B' a_0 a_j + \sum_i C' a_i a_{i-j} + 9m^2 \sum_i a_i a_{-i-j-1} = 0 \end{aligned}$$

ayant $i \neq 0$ et $i \neq j$ dans les troisièmes termes, avec

$$\begin{aligned} A &= 9p^2 - 4(5j - 2)p + 2(10j^2 - 8j + 1), \\ A' &= 9p^2 + 4(j + 2)p - 2(2j^2 - 4j - 1), \\ B &= 9p^2 - 4(j - 2)p - 2(2j^2 + 4j - 1), \\ B' &= 9p^2 + 4(5j + 2)p + 2(10j^2 + 8j + 1). \end{aligned}$$

Or si l'on ajoute les deux relations précédentes, après avoir multiplié respectivement par A' et $-A$ et l'on divise ensuite par $AB' - BA'$, il vient

$$\begin{aligned} 0 &= -a_0 a_j + \sum_i \frac{A'C - C'A}{AB' - BA'} a_i a_{i-j} \\ &\quad + 9m^2 \sum_i \frac{A'}{AB' - BA'} a_i a_{-i+j-1} + 9m^2 \sum_i \frac{-A}{AB' - BA'} a_i a_{-i-j-1}, \end{aligned}$$

où $i \neq 0, j$; et

$$\begin{aligned} C &= 2(4i^2 + 4i + 1) + 4(5j^2 - 4j - 8ij) + [9p^2 + 4(4i - 5j + 2)p], \\ C' &= 2(4i^2 + 4i + 1) - 4(j^2 - 2j - 4ij) + [9p^2 + 4(4i + j + 2)p]. \end{aligned}$$

Enfin, tous calculs faits, nous arrivons à la formule suivante :

$$(3) \quad a_0 a_j = \sum \frac{u_{j,i}}{\Delta_j} a_i a_{i-j} + m^2 \sum \frac{u_j}{\Delta_j} a_i a_{-i+j-1} + m^2 \sum \frac{v_j}{\Delta_j} a_i a_{-i-j-1},$$

où les sommations doivent être étendues à toutes les valeurs entières de i , zéro compris, de $-\infty$ à $+\infty$, $j \neq 0$ étant un entier quelconque dans le même intervalle, avec

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} u_{j,i} &= -\frac{i}{j} [\Delta_j - 4(j-i)(j-1-p)], \\ u_j &= -\frac{3}{16j^2} [4j^2 - 8j - 2 - 4(j+2)p - 9p^2], \\ v_j &= -\frac{3}{16j^2} [20j^2 - 16j + 2 - 4(5j-2)p + 9p^2], \\ \Delta_j &= 8j^2 - 2 - 4p + p^2. \end{aligned} \right.$$

Par la formule qui précède on aura donc les coefficients a . Dans ce but, on y fera d'abord successivement

$$j = \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \dots;$$

et, dans chacun des couples de relations ainsi obtenues, on fera ensuite

$$i = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \quad \dots$$

Pour résoudre ces équations bilinéaires, on procède par approximations successives, en s'appuyant sur ce fait que le paramètre m étant considéré du premier ordre, l'ordre de $a_{\pm j}$ se trouve égal à $|2j|$, les fonctions u, v étant finies.

Ainsi, en une première approximation, en retenant les termes de l'ordre le plus inférieur, les équations seront :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 a_1 = m^2 \frac{u_1}{\Delta_1} a_0 a_0, \\ a_0 a_{-1} = m^2 \frac{v_{-1}}{\Delta_1} a_0 a_0, \\ a_0 a_2 = m^4 \frac{u_2}{\Delta_2} 2 a_0 a_1 + \frac{u_{2,1}}{\Delta_2} a_1 a_{-1}, \\ a_0 a_{-2} = m^4 \frac{v_{-2}}{\Delta_2} 2 a_0 a_1 + \frac{u_{-2,-1}}{\Delta_2} a_1 a_{-1}, \\ a_0 a_3 = m^6 \frac{u_3}{\Delta_3} [a_1^2 + 2 a_0 a_2] + \frac{u_{3,1}}{\Delta_3} a_1 a_{-2} + \frac{u_{3,2}}{\Delta_3} a_2 a_{-1}, \\ a_0 a_{-3} = m^6 \frac{v_{-3}}{\Delta_3} [a_1^2 + 2 a_0 a_2] + \frac{u_{-3,-2}}{\Delta_3} a_1 a_{-2} + \frac{u_{-3,-1}}{\Delta_3} a_2 a_{-1}, \\ \dots \end{array} \right.$$

Les deux premières donnent, à l'aide de a_0 , les coefficients $a_{\pm 1}$; les deux suivantes $a_{\pm 2}$ et, ainsi de suite, on aura de proche en proche tous les coefficients qu'on jugera nécessaires dans les développements des coordonnées de la Lune.

Quant au degré d'exactitude fourni par ces équations, on remarquera que les deux premières sont dépourvues des termes à partir du sixième ordre; les deux autres, à partir du huitième ordre, et ainsi de suite; de sorte que l'erreur commise, à la première approximation, sur $a_{\pm 1}$ sera du sixième ordre, celle de $a_{\pm 2}$ du huitième ordre et, en général, l'erreur commise sur $a_{\pm j}$ sera de l'ordre $|2j| + 4$. A la seconde approximation, les deux premières équations étant dépourvues des termes à partir du dixième ordre, les deux suivantes à partir du douzième ordre, et ainsi de suite, l'erreur commise sur $a_{\pm j}$ sera de l'ordre $|2j| + 8$, c'est-à-dire de quatre unités plus grand qu'à l'approximation précédente.

Finalement donc, si N désigne le nombre des approximations successives et ω le degré d'exactitude voulu, l'erreur commise sur $a_{\pm j}$ sera de l'ordre $|2j| + 4N$; de sorte que la condition $|2j| + 4N \geq \omega$ donnera la plus petite valeur de N nécessaire pour atteindre ω ; et d'ailleurs ce nombre sera atteint rapidement. Ainsi pour $j = \pm 1$ nous voyons qu'il suffit de trois approximations successives pour que le degré d'exactitude soit porté à 14, c'est-à-dire pour avoir les coefficients $a_{\pm 1}$ avec une erreur du quatorzième ordre. Pour avoir ensuite les coefficients $a_{\pm 2}$ avec le même degré d'exactitude, il suffira de deux approximations, tandis que pour les autres coefficients on pourra s'en tenir à la première approximation seulement. La nécessité d'un grand degré d'exactitude est en premier lieu justifiée par l'importance des premiers coefficients $a_{\pm 1}$, attendu qu'ils correspondent à l'inégalité la plus considérable de sa classe, c'est-à-dire la *variation*. Mais la précision de leurs développements dépend de l'erreur commise qui, elle-même, dépend de la grandeur du paramètre m .

Pour les petites valeurs de m , comme celle qui correspond à la Lune terrestre, la précision est assez grande dès la première approximation, car l'erreur commence, dans les développements de $a_{\pm 1}$, avec les termes en m^6 . Ainsi, d'après la valeur considérée par Hill, à savoir

$$m = 0,08084 \ 89338 \ 08312,$$

on voit que $m < \frac{9}{10^2}$, d'où $m^6 < \frac{1}{10^6}$, ou bien

$$\frac{m^6}{\sin 1''} = \frac{206265}{10^6},$$

ce qui veut dire que l'erreur ne s'élève jamais à $0'',3$; et l'on comprend que la petitesse des coefficients numériques de m^6 rendra cette erreur encore plus faible. Mais, il n'en sera plus de même, en général, s'il s'agit des valeurs de m plus grandes avec les mêmes coefficients numériques. Dans ce cas l'erreur, pouvant devenir notable, aura pour effet de rendre les développements impropres à l'analyse, leur précision étant alors insuffisante. Or, dans la théorie moderne de la Lune, celle de Hill-Brown, il y a là un inconvénient de tout premier ordre; et de fait, comme nous le verrons plus loin, la difficulté qu'il comporte a été de

nature à faire abandonner à Hill, à partir d'une certaine valeur de m , la voie analytique. D'ailleurs, nous allons mieux suivre l'ordre des idées de Hill en considérant ce point de plus près. Dès le début, préoccupé dans son travail (*Op. cit.*) par l'emploi de développements plus aptes à servir à la réduction en Tables, Hill n'envisage leur convergence qu'au point de vue de l'astronome; la convergence *analytique* devrait former une nouvelle étude, et c'est vers ce but que nos efforts ont été dirigés. Mais, pour les raisons qui suivent, il convient de nous arrêter un moment à la convergence au sens de Hill.

Si l'inconvénient dont nous venons de parler s'attache précisément au paramètre m , alors on pourra penser à trouver un nouveau paramètre, ayant sur m l'avantage de fournir les développements avec une grande exactitude, soit pour des petites valeurs, soit pour des valeurs assez grandes de ce paramètre. C'est ce que Hill a tenté de faire; et cela de façon à assurer la rapidité de la convergence de ses développements, ou plutôt la rapidité de la décroissance de leurs termes. Mais, il est clair que l'influence des coefficients numériques ne saurait être évitée. Et alors on peut se demander : De quelle manière cette influence s'introduit-elle dans les développements, une fois le paramètre choisi; et s'il n'y a pas moyen de lui assigner un rôle prépondérant en vue de la convergence. Posée ainsi, la question revient à chercher des développements dont la rapidité de la convergence ne soit pas précisément assurée par un choix du paramètre, mais plutôt par la présence des coefficients numériques. Si le problème reste encore très étendu, en revanche, il nous semble plus commode à être envisagé sous cette forme et susceptible de solutions avantageuses. C'est ce que nous voulons montrer.

II.

Nous remarquerons que, pour la mise en train des calculs nécessités par les approximations successives, on peut encore s'arranger de la manière suivante. L'équation *exacte* (3), résolue par rapport à a_j , avec $j > 0$ et $a_0 = 1$, se présente, d'après (4), sous la forme

$$(6) \quad a_j = \frac{\Delta_j L + M + m^2 N}{\Delta_j^2 + \Delta_j P + 2m^2 Q},$$

où nous avons

$$L = A + m^2 B,$$

$$M = EA' - AC',$$

$$N = EB' - BC' + 2(FA' - AD') + 2m^2(FB' - BD'),$$

$$P = 3(\Delta_j + 16j^2)a_{2j}a_{-2j} - \frac{27}{8j^2}m^2(a_{-1}^2 - a_{2j-1}a_{-2j-1}) - [C + C' + 2m^2(D + D')],$$

$$Q = CD' + DC' - FE' - EF';$$

$$\begin{aligned} A &= \sum_{(s)} u_{j,i} a_i a_{i-j}, & B &= u_j \sum_{(h)} a_i a_{-i+j-1} + v_j \sum_{(k)} a_{-i} a_{i-j-1}, \\ C &= u_{j,2j} a_{2j}, & D &= u_j a_{-1} + v_j a_{-2j-1}, & E &= u_{j,-j} a_{-2j}, \\ & & F &= u_j a_{2j-1} + v_j a_{-1}. \end{aligned}$$

Quant aux expressions de A' , B' , C' , D' , E' , F' , elles se déduisent de A , B , C , D , E , F , respectivement en changeant j, i en $-j, -i$. Nous avons ensuite pour h, k, s les valeurs

$$\begin{aligned} h &= -1, & \pm j, & & 2j-1, \\ k &= 1, & \pm j, & & 2j+1, \\ s &= 0, & \pm j, & & 2j, \end{aligned}$$

que i ne doit pas recevoir; telle est la signification des indices (s) , (h) , (k) que nous donnons ici aux signes Σ de A et B .

Ces sommations doivent donc être étendues à toutes les valeurs de i , sauf celles-ci. D'ailleurs pour A' , il est clair que l'indice (s) sera le même; mais pour B' , les indices (h) , (k) doivent être permutés entre eux.

Avec la formule (6) nous pourrons donc aller de proche en proche dans le calcul de a_{+j} ou a_{-j} , car son second membre a été préparé de façon à ne plus renfermer ces coefficients; seulement, à chaque opération il sera nécessaire de négliger tous les coefficients d'indices supérieurs.

Ainsi, supposons que par un moyen quelconque, par des équations que nous appellerons *initiales*, nous ayons obtenu un système de valeurs approchées des $a_{\pm 1}$.

Ces premières valeurs portées dans le second membre de (6), où les coefficients d'indices $j > 1$, seront supprimés, on obtiendra les valeurs

des $a_{\pm 2}$; les $a_{\pm 1}$ et les $a_{\pm 2}$ ainsi calculés, portés de nouveau dans les seconds membres de (6), où maintenant les coefficients d'indices $j > 2$ seront supprimés, on aura les valeurs des $a_{\pm 3}$, et ainsi de suite. On continue de la sorte jusqu'à ce qu'on obtienne un nombre déterminé de ces coefficients et qui dépend toujours du degré d'exactitude voulu, ainsi que nous l'avons expliqué au numéro précédent.

Alors on procède à la *deuxième* approximation. Cela consiste à porter les valeurs de tous ces coefficients déjà calculés, pour lesquels $j \geq 2$, dans nos équations initiales et à déduire de là de nouvelles valeurs des $a_{\pm 1}$ plus approchées. Puis l'opération recommence, comme nous venons de le dire, en procédant à la *troisième* approximation, et ainsi de suite.

Seulement, par la suppression des divers coefficients, chaque résultat va être entaché d'une nouvelle erreur, ce qui explique la nécessité d'avoir toujours une limite supérieure des erreurs commises. Cette question appartient du reste à des considérations qui seront traitées plus loin.

Un fait à retenir pour le moment, c'est la façon dont la formule (6) met en évidence Δ_j ; et comme $a_{\pm j}$ est de l'ordre de m^{2j} , nous pouvons poser

$$(7) \quad a_{\pm j} = \frac{m^{2j}}{\Delta_j} b_{\pm j}.$$

Cette formule va nous servir plus loin. Elle peut également servir ici, et avec avantage, car le calcul des coefficients $a_{\pm j}$, après une préalable transformation de (6), revient plus simplement à celui des $b_{\pm j}$. Mais, dans ce but, on peut encore procéder comme il suit.

Considérons d'abord un polynôme du second degré en x :

$$U = Ax^2 + Bx + C.$$

En faisant la transformation

$$x = \frac{\alpha' y + \beta'}{\alpha y + \beta}$$

avec $\alpha' = 1$, $\beta' = 0$, $\beta = 1$, $\alpha = -\frac{B}{2C}$, on aura dans ce cas

$$(8) \quad x = \frac{y}{1 - \frac{B}{2C} y}$$

et $\frac{1}{U}$ se présentera sous la forme

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{C} \left(1 - \frac{B}{2C} \mathcal{Y} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{A}{C} - \frac{B^2}{4C^2} \right) \mathcal{Y}^2 \right]^{-1}.$$

En posant alors

$$x = \Delta_j, \quad y = T_j$$

avec

$$A = 1, \quad B = P, \quad C = 2m^2Q, \quad K = M + m^2N.$$

il viendra, d'après (6),

$$a_j = \frac{\Delta_j L + K}{U},$$

où

$$U = \Delta_j^2 + \Delta_j P + 2m^2Q$$

avec

$$\Delta_j = \frac{T_j}{1 - \frac{P}{4m^2Q} T_j}, \quad \text{d'où} \quad T_j = \frac{\Delta_j}{1 + \frac{P}{4m^2Q} \Delta_j}.$$

Nous aurons donc finalement, d'après (6),

$$(9) \quad a_j = \frac{1}{2m^2Q} \left[K + \left(L - \frac{KP}{4m^2Q} \right) T_j \right] \\ \times \left(1 - \frac{P}{4m^2Q} T_j \right) \left[1 + \frac{1}{2m^2Q} \left(1 - \frac{P^2}{8m^2Q} \right) T_j^2 \right]^{-1},$$

c'est-à-dire une nouvelle formule pour calculer a_j , et surtout pour effectuer le développement *exact* de a_j sous la forme plus générale en m et p , lorsque la distinction entre ces deux paramètres est à conserver.

Comme les expressions

$$\frac{P}{4m^2Q} = \alpha_j, \quad 2\frac{K}{P}\alpha_j = \beta_j, \quad L - K\alpha_j = \gamma_j, \quad 2\frac{1}{P}\alpha_j \left(1 - \frac{P}{2}\alpha_j \right) = \delta_j$$

ne dépendent pas de T_j , mais de $m, u_j, v_j, u_{j,i}$, elles sont des fonctions de m, p ; et le travail que nécessite alors la formule (9) sera d'effectuer trois sortes de développements distincts : celui de a_j suivant les puissances croissantes de T_j , puis celui des $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j$ et enfin celui de T_j par le retour à Δ_j .

On s'aperçoit peut-être ainsi, non seulement de l'existence d'un grand

nombre de méthodes nouvelles pour la construction des Tables, mais encore de la possibilité d'en concevoir de plus générales que celles déjà tracées. Nous ne voulons pas parler de la méthode de Hansen, puisqu'elle ne repose pas sur l'emploi des expressions algébriques renfermant des paramètres, mais de celles de Delaunay et Hill-Brown.

Par rapport à la première, au lieu des expressions déterminées des coefficients des développements, nous aurons des quantités variables, vu la présence d'un des paramètres m et p . Par rapport à l'autre méthode, où ces coefficients sont *numériques*, les développements pourront être effectués, non pas précisément suivant les puissances de m , mais suivant celles d'une fonction de m ou, plus généralement, d'une fonction de m, p , pourvu qu'ils convergent. Et la fonction T_j de m, p est indiquée bien pour cela dans la formule qui précède. C'est d'ailleurs ce que Hill a senti nécessaire de faire, comme nous disions plus haut; et, de fait, le choix de son nouveau paramètre, que nous appellerons m'' , revient à notre transformation homographique (8), où il suffira de faire

$$x = m, \quad y = m'',$$

$$\frac{B}{2C} = -\frac{1}{3}.$$

Pour préciser, nous ajouterons que c'est une transformation homographique du polynôme

$$\Delta_1 = 6 - 4p + p^2 \quad (p = m).$$

Ce polynôme, qui joue le rôle de U , se présente en effet dans les équations de Hill, comme diviseur, et s'il a été modifié ainsi, c'est pour la convergence des développements, ou plutôt en vue de la rapidité de leur convergence. De fait, le paramètre m'' , déduit de la sorte, a l'avantage sur m de rendre les développements plus convergents et plus simples. Un tel avantage se voit encore par la comparaison avec les développements de Delaunay et de Plana, et c'est ainsi que Hill a mis en évidence la supériorité de ses paramètres; seulement, M. Poincaré a établi ce fait par voie analytique (*Mécanique céleste*, *loc. cit.*, n° 330).

Mais il convient de préciser davantage. Les équations dont Hill fait usage sont les équations (5), c'est-à-dire *approchées*; et par leur forme

simple, toute indiquée pour la commodité des calculs, le rôle joué par Δ_1 devient particulièrement remarquable au point de vue de la convergence. En effet, partant, en première approximation, des équations initiales

$$(10) \quad a_1 = m^2 \frac{u_1}{\Delta_1} a_0, \quad a_{-1} = m^2 \frac{v_{-1}}{\Delta_1} a_0$$

pour effectuer le calcul des coefficients $a_{\pm j}$, où $j \geq 2$, la façon dont le diviseur Δ_1 s'introduit dans leurs expressions permet de rendre ces coefficients comparables aux termes d'une progression géométrique dont la raison est de l'ordre de $\frac{1}{\Delta_1}$. De là donc l'intérêt qui devait s'attacher à la grandeur de ce diviseur. Car il est clair que, si la petitesse de Δ_1 était un sérieux obstacle à la rapidité de la convergence des coefficients $a_{\pm 1}$, la lenteur de la convergence des autres coefficients proviendrait principalement, comme le fait remarquer Brown (*Treatise on the Lunar Theory*, Chap. XI, n° 254), de la présence de ce diviseur.

Mais cet obstacle peut bien tenir à d'autres causes. Et, de fait, l'influence de Δ_1 ne doit être envisagée qu'en rapport avec les fonctions u et v . Si pour $|j| > 1$, cette influence peut encore être sensible parce que le diviseur Δ_j augmente plus vite que $|u_{\pm j}|$, $|v_{\pm j}|$, indépendamment de Δ_1 , en revanche, pour $|j| = 1$, avec p grand, la valeur de $|v_{-1}|$ l'emporte de beaucoup sur celle de Δ_1 . Et en raison de cette circonstance qui se présente dès la première opération, sans parler de l'influence des fonctions $|u_{j,i}|$, on comprend pourquoi le second paramètre m'' de Hill devient, à son tour, insuffisant pour des valeurs plus fortes. Si bien que, lorsqu'il passe à l'étude des satellites à *lunaison* plus grande que celle de la vraie Lune, Hill abandonne la voie analytique ayant recours aux quadratures mécaniques des équations différentielles. Avec des déplacements d'une convergence mal assurée pour p grand, la difficulté devait être en effet insurmontée. Seulement, par rapport aux équations initiales de Hill, la remarque de Brown est parfaitement justifiée; ces équations étant moins complètes, la vraie difficulté ne pouvait pas encore entrer en ligne de compte.

C'est pourquoi nous avons choisi de nouvelles équations initiales. Elles donneront les inconnues toujours avec les mêmes ordres d'erreur que les équations de Hill, mais avec une exactitude plus grande, car

elles sont plus complètes, et cela en raison de la seule restriction

$$|i|, \quad |i-j| \leq |j|$$

que nous imposons aux indices des a .

De cette façon les coefficients $a_{\pm 1}$, dont dépend la *variation*, seront définis, d'après (3), par les équations suivantes :

$$(11) \quad \begin{cases} f_1 = 0 = 2m^2 \frac{u_1}{\Delta_1} a_1 a_{-1} + m^2 \frac{v_1}{\Delta_1} a_{-1}^2 - a_{-1} + m^2 \frac{u_1}{\Delta_1} \\ f_{-1} = 0 = 2m^2 \frac{v_{-1}}{\Delta_1} a_1 a_{-1} + m^2 \frac{u_{-1}}{\Delta_1} a_{-1}^2 - a_{-1} + m^2 \frac{v_{-1}}{\Delta_1} \end{cases} \quad (a_0 = 1).$$

Ce sont, en regardant a_1 et a_{-1} comme les coordonnées courantes d'un point dans le plan, les équations de deux hyperboles. Ces coniques vont d'ailleurs nous servir plus loin. Poursuivons pour le moment notre objet. Écrivons d'abord ces équations sous la forme

$$(12) \quad \begin{cases} A a_1 a_{-1} + B a_{-1}^2 - a_{-1} + C = 0, \\ A' a_1 a_{-1} + B' a_{-1}^2 - a_{-1} + C' = 0, \end{cases}$$

en posant

$$(13) \quad \begin{cases} A = 2m^2 \frac{u_1}{\Delta_1}, & A' = 2m^2 \frac{v_{-1}}{\Delta_1}, \\ B = m^2 \frac{v_1}{\Delta_1}, & B' = m^2 \frac{u_{-1}}{\Delta_1}, \\ C = m^2 \frac{u_1}{\Delta_1}, & C' = m^2 \frac{v_{-1}}{\Delta_1}. \end{cases}$$

En éliminant les termes en $a_1 a_{-1}$, nous aurons

$$(14) \quad (AB' - BA') a_{-1}^2 - A a_{-1} + A' a_1 = 0,$$

c'est-à-dire une parabole passant par les points d'intersection des hyperboles (12).

En éliminant les termes en a_{-1}^2 entre les mêmes équations (12) on aura

$$(15) \quad 2(AB' - BA') a_1 a_{-1} + 2B a_{-1} - 2B' a_1 + (AB' - BA') = 0,$$

c'est-à-dire une hyperbole ayant pour directions asymptotiques les axes de coordonnées et passant encore par les points communs aux hyperboles (12).

Ensuite, d'après (12), les expressions des $a_{\pm 1}$ peuvent s'écrire

$$(16) \quad a_1 = C \frac{1 + \frac{B}{C} a_{-1}^2}{1 - A a_{-1}}, \quad a_{-1} = C' \frac{1 + \frac{B'}{C'} a_1^2}{1 - A' a_1},$$

au lieu que, d'après (10), celles de Hill sont : $a_1 = C$, $a_{-1} = C'$.

Maintenant, nous voyons clairement ce qu'il nous faut pour la convergence; une condition nécessaire à sa rapidité sera la petitesse des quantités $|A a_{-1}|$ et $|A' a_1|$.

Or, $AB' - BA'$ est de l'ordre de m^4 : donc avec une erreur de cet ordre, les équations (14) et (15) peuvent être remplacées par

$$\begin{aligned} A' a_1 - A a_{-1} &= 0, \\ B' a_1 - B a_{-1} - \frac{1}{2} (AB' - BA') &= 0, \end{aligned}$$

dont la première représente la tangente à l'origine de la parabole (14), et la seconde, une droite assimilable à la branche de l'hyperbole (15) qui passe aux environs de l'origine; et l'intersection de ces deux droites a pour coordonnées $a_1 = \frac{A}{2} = C$, $a_{-1} = \frac{A'}{2} = C'$, c'est-à-dire précisément les valeurs de Hill.

Ces valeurs portées dans les seconds membres des formules (16), nous aurons, vu (13),

$$(17) \quad \begin{cases} a_1 = m^2 \frac{u_1}{\Delta_1} \left(1 + m^4 \frac{v_1}{u_1} \frac{v_{-1}^2}{\Delta_1^2} \right) \left(1 - 2 m^4 \frac{u_1 v_{-1}}{\Delta_1^2} \right)^{-1}, \\ a_{-1} = m^2 \frac{v_{-1}}{\Delta_1} \left(1 + m^4 \frac{u_{-1}}{v_{-1}} \frac{v_{-1}^2}{\Delta_1^2} \right) \left(1 - 2 m^4 \frac{u_1 v_{-1}}{\Delta_1^2} \right)^{-1}. \end{cases}$$

Une telle solution assure évidemment la rapidité de la convergence pour les petites valeurs de m ; mais il n'en est plus ainsi, du moins pour a_{-1} , s'il s'agit des valeurs plus grandes. En effet, si l'on considère, d'après (4), les valeurs des $u_{\pm 1}$, $v_{\pm 1}$, Δ_1 dans l'intervalle $0 \leq p < 1$, on constate que les coefficients *numériques*

$$\frac{v_1}{u_1} \frac{v_{-1}^2}{\Delta_1^2}, \quad \frac{u_{-1}}{v_{-1}} \frac{v_{-1}^2}{\Delta_1^2}, \quad 2 \frac{u_1 v_{-1}}{\Delta_1^2},$$

sont de l'ordre de -1 , $+1$, $+1$ respectivement; donc les expres-

sions (17) sont approchées des suivantes

$$a_1 = m^2 \frac{u_1}{v_1} \frac{1 - m^4}{1 + m^4}, \quad a_{-1} = m^2 \frac{v_{-1}}{\Delta_1}.$$

Or la dernière n'est autre que celle de Hill ; donc elle n'a pas encore été sensiblement modifiée.

Mais, avec le même ordre d'erreur, les équations (14) peuvent également être remplacées par

$$a_1 = \frac{C}{1 - A a_{-1}}, \quad a_{-1} = \frac{C'}{1 - A' a_1};$$

et les valeurs de Hill portées dans les seconds membres, il vient

$$a_1 = \frac{C}{1 - A C'}, \quad a_{-1} = \frac{C'}{1 - A' C}.$$

Alors, vu (13), avec ces nouvelles valeurs premières des $a_{\pm 1}$, les expressions (16) seront

$$(18) \quad a_{\pm 1} = m^2 \frac{A_{\pm 1}}{\Delta_1} (1 - m p^3 \rho)^{-1},$$

où nous avons posé

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{27}{256} \frac{V_1 V_{-1}}{\Delta_1^2}, \\ A_{+1} = \left(1 + 2p^4 \frac{U_1}{V_1} \rho \right) \left[1 - \frac{1}{3} p^4 \frac{V_{-1}}{U_1} \rho \left(1 + 2p^4 \frac{U_1}{V_1} \rho \right)^{-2} \right], \\ A_{-1} = \left(1 + 2p^4 \frac{U_1}{V_1} \rho \right) \left[1 + p^4 \rho \left(1 + 2p^4 \frac{U_1}{V_1} \rho \right)^{-2} \right], \end{array} \right.$$

avec

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_1 = 2 + 4p + 3p^2, \\ U_{-1} = 10 - 4p - 9p^2, \\ V_1 = 2 - 4p + 3p^2, \\ V_{-1} = 38 + 28p + 9p^2. \end{array} \right.$$

En calculant *numériquement*, une fois pour toutes, les quantités ρ et $\frac{A_{\pm 1}}{\Delta_1}$, on n'aura plus qu'à opérer les développements des $a_{\pm 1}$ par la formule (18). C'est dans ce but que nous avons mis en évidence le paramètre p .

D'après cette solution, on voit donc comment on peut s'arranger

pour faire décroître plus vite les coefficients numériques; cette décroissance étant marquée par les puissances de $p\rho$ dans des expressions telles que

$$p \frac{A_{\pm 1}}{\Delta_1} \rho, \quad p^2 \frac{A_{\pm 1}}{\Delta_1} \rho, \quad p^3 \frac{A_{\pm 1}}{\Delta_1} \rho.$$

Abordons maintenant notre objet principal.

III.

Il s'agit de préciser dans quelles conditions les développements sont légitimes pour représenter les fonctions $a_{\pm 1}$ et $a_{\pm j}$ où $|j| \geq 2$.

Considérons d'abord les $a_{\pm 1}$ définis par (11).

Posons, pour plus de commodité, $a_1 = x$, $a_{-1} = y$. Alors les équations (11) seront

$$[11] \quad \begin{cases} Axy + By^2 - x + C = 0 = f_1(x, y), \\ A'xy + B'y^2 - y + C' = 0 = f_{-1}(x, y), \end{cases}$$

les A, B, C, A', B', C' étant donnés par (13).

Mais leurs premiers membres $f_{\pm 1}$ sont des fonctions holomorphes aux environs des valeurs $m^2 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, pour lesquelles ces fonctions s'annulent, tandis que le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(f_1, f_{-1})}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} Ay - 1 & Ax + 2By \\ A'y & A'x + 2B'y - 1 \end{vmatrix}$$

n'est pas nul pour ces valeurs; donc, d'après le théorème de Cauchy sur les fonctions implicites, il existe un système unique de fonction x, y de la variable m , holomorphes aux environs de $m = 0$, s'annulant pour cette valeur et satisfaisant aux équations [11]. Nous aurons alors, d'une part,

$$(21) \quad \begin{cases} x = \alpha_1 m^2 + \alpha_2 m^3 + \dots, \\ y = \alpha'_1 m^2 + \alpha'_2 m^3 + \dots \end{cases}$$

et, d'autre part,

$$(22) \quad \begin{cases} f_1 = 0 = ax + by + cm^2 + \dots \\ f_{-1} = 0 = a'x + b'y + c'm^2 + \dots \end{cases}$$

les coefficients des variables étant numériques.

Mais puisque

$$\left[\frac{D(f_1, f_{-1})}{D(x, y)} \right]_{000} \neq 0,$$

nous pouvons résoudre les équations (22) par rapport aux premières puissances de x, y et nous aurons, avec des notations plus symétriques, les équations suivantes

$$(23) \quad \begin{cases} x = c_1 m^2 + c_2 m^3 + \dots + a_{20} x^2 + a_{11} xy + a_{02} y^2 + \dots + \sum a_{j,h,k} m^j x^h y^k + \dots, \\ y = c'_1 m^2 + c'_2 m^3 + \dots + a'_{20} x^2 + a'_{11} xy + a'_{02} y^2 + \dots + \sum a'_{j,h,k} m^j x^h y^k + \dots, \end{cases}$$

dont les seconds membres sont convergents pour des petites valeurs de m, x, y et dont les coefficients sont connus.

A ces équations nous allons satisfaire par des développements tels que (21) supposés convergents; cela conduira à un système de formules de récurrence permettant d'obtenir de proche en proche et sans ambiguïté tous les coefficients α, α' . Nous aurons ainsi, après identification, les formules suivantes

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= c_1, & \alpha'_1 &= c'_1, \\ \alpha_2 &= c_2, & \alpha'_2 &= c'_2, \\ \alpha_3 &= c_3 + a_{20} \alpha_1^2 + a_{11} \alpha_1 \alpha'_1 + a_{02} \alpha_1'^2 + \alpha_1 + \alpha'_1, & \alpha'_3 &= \dots, \\ \alpha_4 &= c_4 + 2a_{20} \alpha_1 \alpha_2 + a_{11} (\alpha_1 \alpha'_2 + \alpha'_1 \alpha_2) + 2a_{02} \alpha'_1 \alpha'_2 + \alpha_2 + \alpha'_2, & \alpha'_4 &= \dots, \end{aligned}$$

et, d'une manière générale,

$$(24) \quad \alpha_q = c_q + P_q(\alpha_{j,h,k}), \quad \alpha'_q = P'_q(\alpha'_{j,h,k}),$$

où les polynomes P_q et P'_q dépendent, de la même façon, des α, α' déjà connus et des quantités $a_{j,h,k}, a'_{j,h,k}$, respectivement, dont les indices j, h, k sont inférieurs à q , avec mêmes coefficients numériques qui sont réels et positifs.

Il reste à chercher dans quelles conditions les séries (21), dont les coefficients sont donnés par (24), sont en effet convergentes. Nous allons, pour cela, considérer les séries

$$(25) \quad \begin{cases} F_1(m, X, Y) = C_1 m^2 + C_2 m^3 + \dots + \sum A_{j,h,k} m^j X^h Y^k + \dots, \\ F_{-1}(m, X, Y) = C'_1 m^2 + C'_2 m^3 + \dots + \sum A'_{j,h,k} m^j X^h Y^k + \dots, \end{cases}$$

que nous supposons ayant même cercle de convergence que les

séries (22) ou (23), mais avec

$$(26) \quad \begin{cases} A_{j,h,k} \geq |\alpha_{j,h,k}|, & A'_{j,h,k} \geq |\alpha'_{j,h,k}|, \\ C_q \geq |c_q|, & C'_q \geq |c'_q|; \end{cases}$$

dans ces conditions les séries (25) seront des majorantes aux séries (23).

Prenons alors les équations auxiliaires

$$(27) \quad \begin{cases} X = C_1 m^2 + C_2 m^3 + \dots + \Sigma A_{j,h,k} m^j X^h Y^k + \dots, \\ Y = C'_1 m^2 + C'_2 m^3 + \dots + \Sigma A'_{j,h,k} m^j X^h Y^k + \dots, \end{cases}$$

et cherchons à satisfaire par des développements de la forme

$$(28) \quad \begin{cases} X = \beta_1 m^2 + \beta_2 m^3 + \dots, \\ Y = \beta'_1 m^2 + \beta'_2 m^3 + \dots \end{cases}$$

Il est clair que les coefficients β, β' vont se déterminer absolument de la même manière que les coefficients α, α' à l'aide des formules (24) qui deviendront maintenant

$$\beta_q = C_q + P_q(A_{j,h,k}), \quad \beta'_q = C'_q + P'_q(A'_{j,h,k})$$

avec la seule différence que les α, α' sont remplacés par les β, β' ; mais en vertu des conditions admises (26), on aura

$$\beta_q \geq |\alpha_q|, \quad \beta'_q \geq |\alpha'_q|;$$

ainsi, les modules des coefficients des x, y définis par (23) ne peuvent pas dépasser les coefficients des X, Y définis par (27).

Donc la convergence des séries x, y sera assurée dans le même domaine où X, Y eux-mêmes convergent. Or si N désigne une limite supérieure des modules des termes généraux des séries (23), avec les rayons de convergence $\rho > |m|$, $R > |x|, |y|$, les majorantes (25) pouvant être remplacées par la majorante commune

$$\frac{N}{\left(1 - \frac{m}{\rho}\right) \left(1 - \frac{X+Y}{R}\right)} = N - \frac{m}{\rho} N - \frac{X+Y}{R} N,$$

nous aurons, au lieu des équations (27), l'équation

$$Z = \frac{N}{\left(1 - \frac{m}{\rho}\right) \left(1 - 2 \frac{Z}{R}\right)} = \left(1 + \frac{m}{\rho}\right) N - 2 \frac{Z}{R} N$$

(avec $Z \equiv Y = X$), d'où

$$(29) \quad Z = \frac{s}{\rho} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{\rho}\right)^2 - \frac{\tau}{(\rho - m)\rho}},$$

avec

$$(30) \quad s = \frac{R(R\rho - 2Nm)}{2(R + 2N)}, \quad \tau = \frac{m^2NR^2}{2(R + 2N)}.$$

Nous avons donc là deux déterminations de Z qui sont distinctes tant que le radical n'est pas nul; en particulier, celle qui correspond au signe *moins* du radical, s'annule pour $m = 0$, et c'est à cette détermination de Z que se rattachent nos fonctions x, y et qui s'annule pour $m = 0$. De plus, d'après (29), les singularités de Z sont $\rho = 0$, $m = \rho$ et les racines du radical, c'est-à-dire de l'équation

$$(31) \quad \frac{s^2}{\tau} - \frac{\rho}{\rho - m} = 0.$$

Les points critiques correspondant aux racines de cette équation sont évidemment algébriques; ce sont des points de ramification pour les deux déterminations de Z qui s'y confondent en une seule. Mais cette équation revient, d'après (30), à la suivante

$$(32) \quad (2mN - R\rho)^2(\rho - m) - 2N\rho(R + 2N)m^2 = 0,$$

mettant en évidence une racine réelle comprise entre 0 et ρ . Quant aux deux autres racines, elles sont imaginaires. Il suffit de voir en effet que le discriminant du hessien du premier membre de cette équation rendue homogène n'est pas négatif. Ainsi l'équation étant mise sous la forme

$$am^3 + 3bm^2\mu + 3cm\mu^2 + d\mu^3 = 0,$$

avec

$$\mu = 1 \quad \text{et} \quad a = 4N^2, \quad b = -\frac{2}{3}NR\rho, \quad c = \frac{R}{3}(R + 4N)\rho^2, \quad d = -R^2\rho^3,$$

la condition de réalité de toutes les trois racines étant

$$\begin{vmatrix} ad - bc & 2(bd - c^2) \\ 2(ac - b^2) & ad - bc \end{vmatrix} < 0,$$

cette inégalité est impossible, car son premier membre est, à un facteur positif près,

$$R(R - 4N)^2 + 8(R + 2N)(R^2 + 2NR + 16N^2),$$

c'est-à-dire essentiellement positif. Donc la racine de l'équation (32), comprise entre 0 et ρ , est la seule racine réelle. Si alors le plus petit module des trois racines, réelles ou imaginaires conjuguées, est $m_0 < \rho$, pour toutes les valeurs de $|m|$ inférieures à m_0 , la fonction Z , définie par (29), est holomorphe et une de ses déterminations s'annule à l'origine; de sorte que le cercle de convergence des développements des x, y aura l'origine pour centre et un rayon fini : m_0 .

En ce qui concerne la valeur $m = \rho$, nous pouvons remarquer par la relation (29)

$$Z = \frac{s\sqrt{\rho - m} \pm \sqrt{s^2(\rho - m) - \tau\rho}}{\rho\sqrt{\rho - m}},$$

qu'elle rend la fonction Z infinie, mais de telle sorte que son inverse n'est pas uniforme. Pour $\frac{1}{Z}$, ainsi que pour Z , cette valeur correspond encore à un point de ramification, mais aux environs de ce point, les deux déterminations de Z sont imaginaires, car $\tau > 0$, tandis que celles de $\frac{1}{Z}$ sont voisines de zéro. Seulement, le point critique $m = \rho$ se trouve en dehors du cercle de convergence m_0 et il sera laissé de côté. Considérons le cas de $\rho = 0$. Pour cette valeur de ρ , c'est-à-dire pour un cercle de convergence infiniment petit, il semble, d'après (29), que Z pourrait devenir infini; mais il n'en est rien. Nous avons vu en effet que dans le cercle de rayon m_0 , les deux déterminations de Z sont sûrement holomorphes; or, si ρ tend vers zéro, il en sera de même de m , puisque $|m| < \rho$, et par suite $\lim \frac{m}{\rho} = 0$. Donc, d'après (30), ayant

$$\lim \frac{s}{\rho} = \frac{R^2}{2(R + 2N)},$$

$$\lim \frac{\tau}{(\rho - m)\rho} = \lim \frac{\tau}{\rho^2 \left(1 - \frac{m}{\rho}\right)} = \frac{NR^2}{2(R + 2N)} \lim \frac{m^2}{\rho^2 \left(1 - \frac{m}{\rho}\right)} = 0,$$

nous aurons, d'après (29), une détermination de Z dont la valeur tend vers

$$\frac{R^2}{R + 2N},$$

tandis que l'autre détermination tend vers zéro. Ce résultat est donc

conforme à celui du cas général où le rayon du cercle de convergence est fini et non nul.

Maintenant, si ces considérations permettent de préciser l'existence et la nature des singularités, elles ne suffisent pas pour déterminer la distance à l'origine de ces points critiques. Le théorème de Cauchy, en effet, ne donne rien là-dessus. En ces points ce théorème se trouve en défaut. Mais c'est précisément là le cas qui nous intéresse pour la limite supérieure de la convergence. C'est par conséquent le cas où le déterminant fonctionnel des $f_{\pm 1}$ par rapport à x, y est nul. Et cela revient à écrire

$$(33) \quad \begin{vmatrix} A y - 1 & A x + 2B y \\ A' y & A' x + 2B' y - 1 \end{vmatrix} = 0 = J.$$

Or, cette condition exprime que les deux solutions périodiques correspondant à $a_{\pm 1}$ se confondent en une seule; ou encore : que les hyperboles $[11] f_{\pm 1} = 0$ deviennent tangentes. Comme ces coniques ont une direction asymptotique commune, elles ne peuvent avoir que trois points communs à distance finie. Donc, si nous supposons remplie la condition (33), deux de ces points vont se confondre en un seul, par exemple $M_0(x_0, y_0)$, et dont les coordonnées doivent satisfaire à cette condition. Mais alors parmi les sécantes communes aux deux coniques il y en a deux couples confondus en un seul, de telle sorte que M_0 , qui devient le point de contact de ces courbes, sera l'intersection des sécantes doubles; ces sécantes sont, comme on sait, définies par l'équation $f_1 + \lambda_0 f_{-1} = 0$, où λ_0 est la racine double de l'équation $F(\lambda) = 0$, et dont le premier membre est le discriminant de $f_1 + \lambda f_{-1}$, avec λ un paramètre arbitraire. Mais si l'équation précédente a une racine double, c'est que le hessien de la forme homogène $F(\lambda, \mu)$ est un carré parfait. Et cette circonstance a lieu si le discriminant de ce hessien est nul.

L'équation $F(\lambda, \mu) = 0$ étant alors de la forme

$$a\lambda^3 + 3b\lambda^2\mu + 3c\lambda\mu^2 + d\mu^3 = 0,$$

avec $\mu = 1$ et

$$(34) \quad a = A'^2 C' = \frac{A'^3}{2}, \quad b = A'^2 C - \frac{A'}{3}, \quad c = A^2 C' + \frac{B' - A}{2}, \quad d = A^2 C + B = \frac{A^3}{2} + B,$$

la condition d'existence d'une racine double s'exprimera par

$$(35) \quad \begin{vmatrix} ad - bc & 2(bd - c^2) \\ 2(ac - b^2) & ad - bc \end{vmatrix} = 0.$$

Cette condition est donc la conséquence de $J = 0$ (33); son premier membre, vu (34), ne dépend que des paramètres m, p et elle permet de trouver toutes les valeurs critiques de ces paramètres, c'est-à-dire pour lesquelles nos fonctions x, y cessent d'être holomorphes. Mais la plus petite d'entre elles nous intéresse en premier lieu.

Avec les notations (20) ayant

$$[13] \quad u_1 = \frac{9}{16} V_1, \quad u_{-1} = -\frac{3}{16} U_{-1}, \quad v_1 = -\frac{9}{16} V_1, \quad v_{-1} = -\frac{3}{16} V_{-1},$$

les expressions (34), vu (13), seront avec $H = \frac{m^2}{\Delta_1}$

$$\begin{aligned} a &= -\frac{3^3}{4^5} H^3 V_{-1}^3, & b &= \frac{1}{8} H V_{-1} + \frac{3^4}{4^5} H^3 U_1 V_{-1}^2, \\ c &= -\frac{H}{16} (U_{-1} + 6 U_1) - \frac{3^5}{4^5} H^3 U_1^2 V_{-1}, & d &= -\frac{3^2}{4^2} H V_1 + \frac{3^6}{4^5} H^3 U_1^3, \end{aligned}$$

et de là résulte

$$(36) \quad ad - bc = K P_1 + K^2 P_2, \quad 2(ac - b^2) = K Q_1 + K^2 Q_2, \quad 2(bd - c^2) = K R_1 + K^2 R_2,$$

où nous avons posé $K = \left(\frac{H}{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{2\Delta_1}\right)^2$, et

$$(37) \quad \begin{cases} P_1 = \frac{1}{2^5} (U_{-1} + 6 U_1) V_{-1}, & P_2 = \frac{3^4}{4^5} (U_1 U_{-1} + 12 U_1^2 + 3 V_1 V_{-1}) V_{-1}^2, \\ Q_1 = -\frac{1}{8} V_{-1}^2, & Q_2 = 2 \frac{3^3}{4^5} (U_{-1} - 6 U_1) V_{-1}^3, \\ R_1 = -\frac{1}{32} [(U_{-1} + 6 U_1)^2 + 18 V_1 V_{-1}], & R_2 = -2 \frac{3^5}{4^5} [6 U_1^2 + 3 V_1 V_{-1} + 2 U_1 U_{-1}] U_1 V_{-1}. \end{cases}$$

L'équation (35) devient ainsi

$$K^2 (P_2^2 - Q_2 R_2) + K (2 P_1 P_2 - Q_1 R_2 - R_1 Q_2) + P_1^2 - Q_1 R_1 = 0;$$

ou bien, si nous posons

$$(38) \quad \begin{cases} P = U_{-1} + 6U_1, & Q = U_{-1} - 6U_1, \\ R = 6U_1^2 + 3V_1V_{-1} + 2U_1U_{-1}, & S = P^2 + 18V_1V_{-1}, \\ T = U_1V_{-1} + 12U_1^2 + 3V_1V_{-1} = R - QU_1, & M = m^4V_{-1}, \end{cases}$$

nous aurons, d'après (37), l'équation suivante

$$(39) \quad 3^8(T + QU_1)^2M^2 + 3^34^4(3T + S - 3PU_1)Q\Delta_1^2M + 4^7(P^2 - 4S)\Delta_1^4 = 0,$$

et dont les coefficients dépendent seulement de p , étant les polynomes du 8^e, 10^e et 12^e degré. Afin de résoudre cette équation, nous allons considérer les paramètres m et p comme indépendants l'un de l'autre, en faisant varier p dans un intervalle déterminé, par exemple $(0, 1)$.

Pour chaque valeur de p appartenant à cet intervalle, l'équation précédente donnera deux valeurs de M (réelles ou imaginaires). Alors, en prenant les modules correspondants de M , nous aurons les modules de m par la formule

$$(40) \quad |m| = \sqrt[4]{\frac{|M|}{V_{-1}}}.$$

Et comme nous devons considérer finalement $p = m$, les seules valeurs acceptables pour la convergence seront celles pour lesquelles $p < |m|$. Effectivement, les valeurs numériques de $|m|$, de plus petit module que nous considérons ici, sont celles qui correspondent à des racines *imaginaires* de l'équation (39).

Avec les valeurs de $U_{\pm 1}$, $V_{\pm 1}$, Δ_1 , suffisamment approchées, pour les diverses valeurs de p inscrites dans la première colonne de cette Table

	p .	U_1 .	U_{-1} .	V_1 .	V_{-1} .	Δ_1 .
(I)	0	2	10	2	38	6
	0,1	2,4	9,5	1,6	40,8	5,6
	0,2	2,9	8,8	1,3	43,9	5,2
	0,3	3,4	7,9	1	47,2	4,8
	0,4	4	6,9	0,8	50,6	4,5
	0,5	4,7	5,7	0,7	54,2	4,2
	0,6	5,4	4,3	0,68	58	3,9
	0,7	6,27	2,79	0,67	62	3,69
	0,8	7,1	1	0,7	66,16	3,4
	0,9	8	— 0,89	0,8	70,49	3,2
	1	9	— 3	1	75	3
	...					

puis, avec $M = -\frac{B}{A} \left(-\sqrt{1 - \frac{AC}{B^2}} \right)$ donné par l'équation (39), car elle est de la forme

$$AM^2 + 2BM + C = 0,$$

nous avons la Table suivante où, pour les mêmes valeurs de p , se trouvent les valeurs approchées des *log. vulg.* de $-\frac{B}{A} \sqrt{1 - \frac{AC}{B^2}}$ et celles de $|M|$ et $|m|$ qui nous intéressent :

p .	$\log \left(-\frac{B}{A} \right)$.	$\log \left(1 - \frac{AC}{B^2} \right)^{\frac{1}{2}}$.	$\log M $.	$ m $.
(II) 0	0,07446	1,14244	1,18438	0,796
0,1	0,44476	0,73928	1,09604	0,743
0,2	0,66247	0,49255	0,98655	0,685
0,3	0,82160	0,32881	0,87545	0,631
0,4	0,96924	0,21031	0,76373	0,582
0,5	1,09677	0,12948	0,63710	0,531
0,6	1,19892	0,08068	0,50895	0,485
...				

Ces valeurs sont évidemment suffisantes pour montrer que la valeur critique de m se trouve entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{5}$. Donc les développements des $a_{\pm}$, définis par les équations (11) sont sûrement convergents jusqu'à $m = \frac{1}{2}$ (*Comptes rendus*, 20 juin 1910). On trouve d'ailleurs que $\frac{13}{25}$ est encore une limite supérieure acceptable pour m , car nous avons dans ce cas, sur la Table (II),

$$p = 0,52 \mid 1,10917 \mid 0,12074 \mid 0,61500 \mid 0,5232 = |m|.$$

Seulement, pour cette singularité, le point de contact de nos coniques [11] n'est pas réel. En étudiant leur déplacement dans le plan, avec $p = m$, on trouve que ces hyperboles n'arrivent en contact que pour $m = \infty$, où elles se confondent en une seule

$$xy - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2} = 0.$$

IV.

Nous avons vu comment le choix des équations (11) a été fait. C'est en imposant aux indices des a , dans les équations générales de Hill, la restriction

$$|i|, \quad |i-j| \leq |j| = 1;$$

et par cela même les coefficients dont dépendent les inégalités secondaires ont été supprimés.

Il convient maintenant de nous affranchir de cette restriction. Pour aborder la convergence des $a_{\pm 1}$ en tenant compte de toutes ces inégalités, il est indispensable de connaître les expressions analytiques des coefficients $a_{\pm j}$ où $j \geq 2$, en fonction de $a_{\pm 1}$, ou plutôt une limite supérieure à ces coefficients. C'est ce que nous nous proposons tout d'abord de chercher, en faisant usage des fonctions majorantes.

Reprenons donc les équations (3) de Hill et faisons la transformation (7). On aura

$$(40) \quad b_j = \sum_i u_{j,i} \frac{b_i b_{i-j}}{\Delta_i \Delta_{i-j}} m^{2h_0} + u_j \sum_i \frac{b_i b_{j-i-1}}{\Delta_i \Delta_{j-i-1}} m^{2h'_1} + v_j \sum_i \frac{b_i b_{-j-i-1}}{\Delta_i \Delta_{j+i+1}} m^{2h''_1},$$

et une expression analogue pour b_{-j} se déduisant de celle-ci en changeant i, j en $-i, -j$ et h'_1, h''_1 en h'_{-1}, h''_{-1} , avec

$$(41) \quad \begin{cases} h_0 = |i| + |i-j| - |j|, \\ h'_{\pm 1} = |i| + |j-i \mp 1| - |j| + 1, & h''_{\pm 1} = |i| + |j+i \pm 1| - |j| + 1. \end{cases}$$

Mais, d'après (4), il vient

$$\frac{u_{j,i}}{\Delta_j} = \frac{i}{j} \left(\frac{j-i}{2j} \frac{\theta}{\theta'} - 1 \right), \quad \theta = 1 - \frac{1+p}{j}, \quad \theta' = 1 + \frac{\Delta_0}{8j^2};$$

et il est clair que, lorsque j augmente indéfiniment, θ et θ' tendent vers 1. Alors, pour j *grand*, nous aurons

$$(42) \quad \begin{cases} \left| \frac{u_{j,i}}{\Delta_j} \right| = \left| \frac{i}{j} \left(\frac{j-i}{2j} - 1 \right) \right| \leq \frac{j-1}{j} < 1 & (|i| < j); \\ \left| \frac{u_{j,i}}{\Delta_j} \right| < \left(\frac{i}{j} \right)^2 & (|i| > j); \end{cases}$$

et nous pourrons écrire aussi

$$(43) \quad \frac{|u_j|}{\Delta_j}, \frac{|v_j|}{\Delta_j} < \frac{9}{8j^2\theta'} \leq \frac{1}{j^2},$$

car $|u_j| < 2$, $|v_j| < 9$, avec $j \gtrless 0$.

Donc, d'après (42), (43), si nous posons

$$(44) \quad \frac{b_{\pm k}}{\Delta_k} = c_{\pm k} \quad (k = 1, 2, \dots, \infty; c_0 = 1),$$

nous aurons, au lieu de (40), ces équations *majorantes* pour j grand

$$(45) \quad c_{\pm j} = \sum_{|i| < j} c_{\pm i} c_{\mp j \pm i} m^{2h_0} + \sum_{|i| > j} \left(\frac{i}{j}\right)^2 c_{\pm i} c_{\pm i \mp j} m^{2h_0} \\ + \frac{1}{j^2} \sum_i c_{\pm i} c_{\pm j \mp i - 1} m^{2h_{\pm 1}} + \frac{1}{j^2} \sum_i c_{\pm i} c_{\mp j \mp i - 1} m^{2h'_{\pm 1}}.$$

On remarquera que j est maintenant partout positif, car les signes $\pm$ ont été mis en évidence. Quant à i , il doit recevoir toutes les valeurs entières de $-j$ à $+j$ dans le premier terme du second membre et de $-\infty$ à $+\infty$ dans les trois autres termes, excepté toutefois les valeurs 0, ainsi que $\pm j$ pour $c_{\pm j}$, respectivement, dans les termes en m^{2h_0} . D'ailleurs, d'après la Table

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{c|ccccccc} & i < -j & i = -j & -j < i < 0 & i = 0 & 0 < i < j & i = j & j < i \\ \hline 2h_0 & 4|i| & 4j & 4|i| & 0 & 0 & 0 & 4(i-j) \\ 2h'_1 & 4|i| & 4j & 4|i| & 0 & 0 & 4 & 4(i-j+1) \\ 2h''_1 & 4(|i|-j) & 4 & 4 & 4 & 4(i+1) & 4(j+1) & 4(i+1) \\ 2h'_{-1} & 4(|i|+1) & 4(j+1) & 4(|i|+1) & 4 & 4 & 4 & 4(i-j) \\ 2h''_{-1} & 4(|i|-j+1) & 4 & 0 & 0 & 4i & 4j & 4i \end{array} \right.$$

qui renferme les diverses valeurs de $2h_0, 2h'_{\pm 1}, 2h''_{\pm 1}$ lorsque i va de $-\infty$ à $+\infty$, on trouve aisément que nos équations majorantes prennent la

forme

$$(46) \left\{ \begin{aligned} c_j &= \sum_1^{j-1} c_i c_{-j+i} + \sum_1^j c_{-i} c_{-j-i} m^{4i} + \sum_{j+1}^{\infty} \left(\frac{i}{j}\right)^2 c_i c_{i-j} m^{4(i-j)} + \sum_{j+1}^{\infty} \left(\frac{i}{j}\right)^2 c_{-i} c_{-i-j} m^{4i} \\ &+ \frac{1}{j^2} \sum_0^{j-1} c_i c_{j-i-1} + \frac{m^4}{j^2} \sum_j^{\infty} c_i c_{j-i-1} m^{4(i-j)} + \frac{1}{j^2} \sum_1^{\infty} c_{\pm i} c_{j+i-1} m^{4i} \\ &+ \frac{m^4}{j^2} \sum_1^{\infty} c_i c_{-j-i-1} m^{4i} + \frac{m^4}{j^2} \sum_0^j c_{-i} c_{-j+i-1} + \frac{1}{j^2} \sum_{j+1}^{\infty} c_{-i} c_{-j+i-1} m^{4(i-j)}, \\ c_{-j} &= \sum_1^{j-1} c_{-i} c_{j-i} + \sum_1^j c_i c_{j+i} m^{4i} + \sum_{j+1}^{\infty} \left(\frac{i}{j}\right)^2 c_{-i} c_{-i+j} m^{4(i-j)} + \sum_{j+1}^{\infty} \left(\frac{i}{j}\right)^2 c_i c_{i+j} m^{4i} \\ &+ \frac{1}{j^2} \sum_0^{j-1} c_i c_{j-i-1} + \frac{m^4}{j^2} \sum_j^{\infty} c_i c_{j-i-1} m^{4(i-j)} + \frac{1}{j^2} \sum_1^{\infty} c_{-i} c_{j+i-1} m^{4i} \\ &+ \frac{m^4}{j^2} \sum_1^{\infty} c_i c_{-j-i-1} m^{4i} + \frac{m^4}{j^2} \sum_0^j c_{-i} c_{-j+i-1} + \frac{1}{j^2} \sum_{j+1}^{\infty} c_{-i} c_{-j+i-1} m^{4(i-j)}, \end{aligned} \right.$$

ou bien cette forme concentrée

$$(47) \quad \begin{aligned} c_{\pm j} &= \sum_1^{j-1} c_{\pm i} c_{\mp j \pm i} + \frac{1}{j^2} \sum_0^{j-1} c_i c_{j-i-1} \\ &+ \sum_1^j c_{\mp i} c_{\mp j \mp i} m^{4i} + \sum_{j+1}^{\infty} \left(\frac{i}{j}\right)^2 c_{\pm i} c_{\pm i \mp j} m^{4(i-j)} \\ &+ \sum_{j+1}^{\infty} \left(\frac{i}{j}\right)^2 c_{\mp i} c_{\mp i \mp j} m^{4i} + \frac{m^4}{j^2} \sum_0^j c_{-i} c_{-j+i-1} \\ &+ \frac{1}{j^2} \sum_{j+1}^{\infty} c_{-i} c_{-j+i-1} m^{4(i-j)} + \frac{m^4}{j^2} \sum_j^{\infty} c_i c_{j-i-1} m^{4(i-j)} \\ &+ \frac{1}{j^2} \sum_1^{\infty} c_{-i} c_{j+i-1} m^{4i} + \frac{m^4}{j^2} \sum_1^{\infty} c_i c_{-j-i-1} m^{4i}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant les fonctions

$$(48) \quad y = \sum_1^{\infty} c_i x^i, \quad z = \sum_1^{\infty} c_{-i} x^i.$$

En désignant par $\epsilon_{\pm j}$ l'ensemble des termes dépendant de m dans les

équations (47), nous aurons évidemment

$$(49) \quad \sum_1^{\infty} c_{\pm j} x^j = \sum_1^{\infty} x^j \sum_1^{j-1} c_{\pm i} c_{\mp j \pm i} + \sum_1^{\infty} \frac{x^j}{j^2} \sum_0^{j-1} c_i c_{j-i-1} + \sum_1^{\infty} \varepsilon_{\pm j} x^j.$$

Mais, pour les besoins de notre analyse, nous allons considérer l'équation plus générale

$$(50) \quad \sum_1^{\infty} c_{\pm j} x^j = \sum_1^{\infty} x^j \sum_1^{j-1} c_{\pm i} c_{\mp j \pm i} + \lambda \sum_1^{\infty} \frac{x^j}{j^2} \sum_0^{j-1} c_i c_{j-i-1} + \lambda \sum_1^{\infty} \varepsilon_{\pm j} x^j,$$

λ étant un paramètre arbitraire ayant finalement la valeur 1.

Formons maintenant les équations différentielles auxquelles satisfont les fonctions (48). D'abord, d'après (48), nous pouvons écrire, avec $k = j - i$,

$$\begin{aligned} yz &= \sum_1^{\infty} c_i x^i \sum_1^{\infty} c_{-k} x^k = \sum_i \sum_k c_i c_{-k} x^{i+k} = \sum_2^{\infty} x^j \sum_1^{j-1} c_i c_{-j+i}, \\ zy &= \sum_1^{\infty} c_{-i} x^i \sum_1^{\infty} c_k x^k = \sum_2^{\infty} x^j \sum_1^{j-1} c_{-i} c_{j-i}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(51) \quad \sum_1^{\infty} x^j \sum_1^{j-1} c_{\pm i} c_{\mp j \pm i} = yz + c_0 c_{\pm 1} x = yz + c_{\pm 1} x \quad (c_0 = 1).$$

Nous aurons de même

$$(52) \quad xy^2 = \sum_1^{\infty} c_i x^{i+1} \sum_1^{\infty} c_k x^k = \sum_i \sum_k c_i c_k x^{i+1+k} = \sum_3^{\infty} x^j \sum_1^{j-2} c_i c_{j-i-1},$$

tandis que

$$\begin{aligned} (53) \quad \lambda \sum_1^{\infty} \frac{x^j}{j^2} \sum_0^{j-1} c_i c_{j-i-1} &= \lambda c_0^2 \frac{x}{1^2} + \lambda (c_0 c_1 + c_1 c_0) \frac{x^2}{2^2} + \lambda \sum_3^{\infty} \frac{x^j}{j^2} \sum_0^{j-1} c_i c_{j-i-1} \\ &= \lambda x + \lambda c_1 \frac{x^2}{2} + 2\lambda \sum_3^{\infty} \frac{x^j}{j^3} c_{j-1} + \lambda \sum_3^{\infty} \frac{x^j}{j^2} \sum_1^{j-2} c_i c_{j-i-1}. \end{aligned}$$

Les deux dernières fonctions du second membre se rattachent

d'ailleurs d'une façon très simple aux fonctions y et xy . En posant, en effet,

$$(54) \quad u = 2 \sum_3^{\infty} \frac{x^j}{j^2} c_{j-1},$$

il vient

$$u' = 2 \sum_3^{\infty} \frac{x^{j-1}}{j} c_{j-1}, \quad u'' = 2 \sum_3^{\infty} \left(1 - \frac{1}{j}\right) x^{j-2} c_{j-1},$$

d'où

$$u'' + \frac{1}{x} u' = 2 \sum_3^{\infty} x^{j-2} c_{j-1} = 2 \sum_2^{\infty} c_j x^j = \frac{2}{x} \sum_2^{\infty} c_j x^j = \frac{2}{x} (y - c_1 x),$$

ou bien

$$(55) \quad x u'' + u' = 2(y - c_1 x).$$

De même, en posant

$$(56) \quad v = \sum_3^{\infty} \frac{x^j}{j^2} \sum_1^{\infty} c_i c_{j-i-1} \equiv \sum_3^{\infty} \frac{x^j}{j^2} w,$$

on trouvera

$$v' = \sum_3^{\infty} \frac{x^{j-1}}{j} w, \quad v'' = \sum_3^{\infty} \left(1 - \frac{1}{j}\right) x^{j-2} w,$$

et, d'après (52),

$$v'' + \frac{1}{x} v' = \sum_3^{\infty} x^{j-2} \sum_1^{j-2} c_i c_{j-i-1} = \frac{1}{x^2} x y^2 = \frac{y^2}{x},$$

d'où

$$(57) \quad x v'' + v' = y^2.$$

Alors, vu (51), (53), (54), (56), nous aurons, au lieu de (50), les équations

$$(58) \quad \begin{cases} y - yz - c_{-1}x - \lambda x - \lambda c_1 \frac{x^2}{2} - \lambda u - \lambda v = \lambda \sum_1^{\infty} \varepsilon_j x^j, \\ z - yz - c_1 x - \lambda x - \lambda c_1 \frac{x^2}{2} - \lambda u - \lambda v = \lambda \sum_1^{\infty} \varepsilon_{-j} x^j, \end{cases}$$

dont les seconds membres sont de l'ordre de m^4 , et, en différentiant par rapport à x deux fois de suite chacune d'entre elles, on en déduira

aisément, d'après (55) et (57), les équations différentielles

$$(59) \quad \begin{cases} (y' + xy'')(1 - z) - (z' + xz'')y - 2xy'z' - \lambda(1 + y)^2 - c_{-1} = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \varepsilon_j x^{j-1}, \\ (z' + xz'')(1 - y) - (y' + xy'')z - 2xy'z' - \lambda(1 + y)^2 - c_{+1} = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \varepsilon_{-j} x^{j-1}. \end{cases}$$

Envisageons d'abord les équations sans seconds membres en faisant $c_j = c_{-j}$. Par cette substitution, nous aurons à considérer plus simplement

$$(60) \quad (y' + xy'')(1 - 2y) - 2xy'^2 - \lambda(1 + y)^2 - c_1 = 0.$$

Les singularités de cette équation sont $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$; et il convient, en raison de ce qui va suivre, d'examiner la nature de ces points critiques. Mais, dans ce but, il y aura avantage à conduire l'intégration de deux manières différentes.

D'abord, nous allons nous servir de la méthode des variations; voir, à ce sujet, la *Mécanique céleste* (*loc. cit.*, Chap. XXVII) de M. Poincaré.

Soit $F(y, y', y'', \lambda)$ le premier membre de l'équation (60). En faisant $\lambda = 0$, l'équation devient

$$(61) \quad y'(1 - 2y) - c_1 + x[y''(1 - 2y) - 2y'^2] = 0 \equiv F(y, y', y'', 0).$$

Comme les deux équations

$$y'(1 - 2y) - c_1 = 0, \quad y'''(1 - 2y) - 2y'^2 = 0,$$

ont une intégrale commune, définie par $y = y^2 + c_1 x$, cette intégrale est une solution particulière de (61). Nous connaissons ainsi ce qu'on appelle la solution *génératrice*, et l'on peut encore l'écrire

$$(62) \quad y_0 = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - 4c_1 x}),$$

le radical étant pris avec son double signe.

Soient alors $z_1, z_2, z_3, \dots$ les variations successives de y_0 et posons

$$y = y_0 + z_1 = y_1, \quad y = y_1 + z_2 = y_2, \quad y = y_2 + z_3 = y_3, \quad \dots$$

L'équation aux variations, si l'on désigne les ordres de différentiation

par des accents, sera

$$(63) \quad Yz_k + Y_1 z'_k + Y_2 z''_k = -F(y_{k-1}, y'_{k-1}, y''_{k-1}, \lambda),$$

où

$$Y = \frac{d}{dy_0} F_0, \quad Y_1 = \frac{d}{dy'_0} F_0, \quad Y_2 = \frac{d}{dy''_0} F_0, \quad F_0 = F(y_0, y'_0, y''_0, 0).$$

Or, d'après (60), il vient

$$\frac{dF}{dy} = -2(y' + xy'') - 2\lambda(1 + y), \quad \frac{dF}{dy'} = 1 - 2y - 4xy', \quad \frac{dF}{dy''} = x(1 - 2y),$$

et, d'après (62),

$$y'_0 = -(1 - 4c_1x)^{-\frac{1}{2}}c_1, \quad y''_0 = -2(1 - 4c_1x)^{-\frac{3}{2}}c_1^2;$$

nous aurons donc

$$Y = 2c_1(1 - 4c_1x)^{-\frac{3}{2}}(1 - 2c_1x),$$

$$Y_1 = (1 - 4c_1x)^{-\frac{1}{2}}(8c_1x - 1),$$

$$Y_2 = -x(1 - 4c_1x)^{\frac{1}{2}},$$

$$F = -\frac{\lambda}{4} \left[3 + (1 - 4c_1x)^{\frac{1}{2}} \right]^2.$$

Donc finalement, l'équation différentielle (63) sera, pour $k = 1$,

$$(64) \quad 2c_1(1 - 4c_1x)^{-\frac{3}{2}}(1 - 2c_1x)z_1 \\ + (1 - 4c_1x)^{-\frac{1}{2}}(8c_1x - 1)z'_1 - x(1 - 4c_1x)^{\frac{1}{2}}z''_1 = \frac{\lambda}{4} \left[3 + (1 - 4c_1x)^{\frac{1}{2}} \right]^2.$$

Considérons, pour l'intégrer, l'équation sans second membre

$$(65) \quad 2c_1(1 - 2c_1x)z_1 + (1 - 4c_1x)(8c_1x - 1)z'_1 - x(1 - 4c_1x)^2z''_1 = 0,$$

et posons

$$(66) \quad z_1 = (1 - 4c_1x)^m t,$$

l'équation transformée sera

$$2c_1(1 + 2m)[1 - 2x(1 + 2m)]t \\ + (1 - 4c_1x)[8c_1x(1 + m) - 1]t' - x(1 - 4c_1x)^2t'' = 0;$$

et comme m est arbitraire, en le prenant égal à $-\frac{1}{2}$, elle va se réduire à la suivante :

$$(67) \quad -(1-4c_1x)^2 t' - (1-4c_1x)^2 t'' = 0,$$

immédiatement intégrable, donnant

$$(68) \quad t = C_0 + Ce^{-x},$$

avec C_0 et C deux constantes arbitraires. Par conséquent, l'intégrale générale de (65) sera, d'après (66),

$$(69) \quad z_1 = (1-4c_1x)^{-\frac{1}{2}} (C_0 + Ce^{-x}).$$

Cherchons maintenant une intégrale particulière de (64) qu'on peut encore écrire

$$2c_1(1-2c_1x)z_1 + (1-4c_1x) \\ \times (8c_1x-1)z_1' - x(1-4c_1x)^2 z_1'' = \frac{\lambda}{4} \left[3 + (1-4c_1x)^{\frac{1}{2}} \right]^2 (1-4c_1x)^{\frac{3}{2}}.$$

Alors, d'après (66) qui conduit à (67), nous sommes amenés à chercher tout simplement une intégrale particulière de l'équation

$$t' + t'' = -\frac{\lambda}{4} \left[3 + (1-4c_1x)^{\frac{1}{2}} \right]^2 (1-4c_1x)^{-\frac{1}{2}},$$

qui n'est autre que

$$t' + t'' = -\frac{\lambda}{2} \left[(5-2c_1x)(1-4c_1x)^{-\frac{1}{2}} + 3 \right] \equiv -\lambda \Phi(x),$$

et dont la fonction (68) est évidemment l'intégrale générale de l'équation sans second membre. En appliquant dès lors la méthode de la variation des constantes arbitraires, on aura pour la solution particulière,

$$t = \frac{\lambda}{2} \left[-\int_{x_0}^x \Phi(x) dx + e^{-x} \int_{x_0}^x \Phi(x) e^x dx \right] \equiv \frac{\lambda}{2} J.$$

Donc, d'après (69), l'intégrale particulière cherchée de (64) sera

$$z_1 = (1-4c_1x)^{-\frac{1}{2}} \frac{\lambda}{2} J,$$

ayant

$$J = \frac{1}{12c_1} [(3 + \sqrt{1 - 4c_1x})^3 - (3 + \sqrt{1 - 4c_1x_0})^3] \\ - \frac{1}{4c_1} \int_{x_0}^x (3 + \sqrt{1 - 4c_1x})^2 e^x dx.$$

Par conséquent notre solution, en première approximation, se présentera sous la forme

$$[62] \quad y = y_0 + z_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c_1x}) + \frac{\lambda J}{2\sqrt{1 - 4c_1x}},$$

nous donnant une première indication sur la nature de la singularité $y = \frac{1}{2}$.

Envisageons maintenant la fonction y , qui satisfait à l'équation (60), aux environs de cette valeur critique. La substitution $y = \frac{1}{2} + z$ ramène d'abord cette équation à la suivante

$$(70) \quad 2z(z' + xz'') + 2xz'^2 + \lambda \left(\frac{3}{2} + z \right)^2 + c_1 = 0,$$

et la question revient à examiner la nouvelle fonction z aux environs de sa valeur critique $z = 0$.

Mais il est plus commode de faire la transformation

$$xz z' = u,$$

après quoi l'équation précédente devient

$$2u' + \lambda \left(\frac{3}{2} + z \right)^2 + c_1 = 0,$$

équation équivalente au système

$$(71) \quad \frac{dx}{dz} = \frac{xz}{u}, \quad \frac{du}{dz} = \frac{xz}{u} \varphi(z),$$

où

$$\varphi = -\frac{1}{2} \left[c_1 + \lambda \left(\frac{3}{2} + z \right)^2 \right],$$

donnant tout de suite la signification de la singularité $x = 0$: il n'existe aucune intégrale de (70), et par conséquent aucune fonction y satisfaisant à (60) qui s'annule avec x .

Cherchons donc à satisfaire à (71) par des développements de la forme

$$(72) \quad \begin{cases} x = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots, \\ u = \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots \end{cases}$$

La détermination des coefficients numériques α et β étant effectuée par les formules de récurrence

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 \beta_0, & \beta_0 \beta_1 &= 0, \\ \alpha_0 &= \alpha_1 \beta_1 + 2 \alpha_2 \beta_0, & 2 \beta_0 \beta_2 + \beta_1^2 &= -\frac{1}{2} \alpha_0 \left(c_1 + \frac{9}{4} \lambda \right), \\ \alpha_1 &= \alpha_1 \beta_2 + 2 \alpha_2 \beta_1 + 3 \alpha_3 \beta_0, & 3 \beta_0 \beta_3 + 3 \beta_1 \beta_2 &= -\frac{1}{2} \alpha_1 \left(c_1 + \frac{9}{4} \lambda \right) - \frac{3}{2} \alpha_0 \lambda, \\ \alpha_2 &= \alpha_1 \beta_3 + 2 \alpha_2 \beta_2 + 3 \alpha_3 \beta_1 + 4 \alpha_4 \beta_0, & 4 \beta_0 \beta_4 + 4 \beta_1 \beta_3 + 2 \beta_2^2 &= -\frac{1}{2} \alpha_2 \left(c_1 + \frac{9}{4} \lambda \right) - \frac{3}{2} \alpha_1 \lambda, \\ &\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \end{aligned}$$

nous trouvons

$$(73) \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0, & \alpha_2 = \frac{1}{2} \frac{\alpha_0}{\beta_0}, & \alpha_3 = 0, & \alpha_4 = \frac{\alpha^2}{4 \beta_0} (1 - 2 \beta_2), & \dots, \\ \beta_1 = 0, & \beta_2 = -\frac{1}{4} \frac{\alpha_0}{\beta_0} \left(c_1 + \frac{9}{4} \lambda \right), & \beta_3 = -\frac{1}{2} \frac{\alpha_0}{\beta_0} \lambda, & \beta_4 = \frac{\beta_2}{4 \beta_0} (1 - 2 \beta_2), & \dots; \end{cases}$$

donc les développements (72) seront

$$(74) \quad \begin{cases} x = \alpha_0 + \alpha_2 z^2 + \alpha_4 z^4 + \dots, \\ u = \beta_0 + \beta_2 z^2 + \beta_4 z^4 + \dots, \end{cases}$$

les coefficients dépendant non seulement des arbitraires α_0 , β_0 , mais encore du paramètre λ que nous avons introduit dans les équations différentielles (59), (60).

Or, l'inversion des séries (74) conduit à la suivante

$$(75) \quad z = \gamma_0 (x - \alpha_0)^{\frac{1}{2}} + \gamma_1 (x - \alpha_0)^{\frac{2}{2}} + \gamma_2 (x - \alpha_0)^{\frac{3}{2}} + \dots,$$

où

$$(76) \quad \begin{cases} \gamma_0 = \alpha_2^{-\frac{1}{2}}, \\ \gamma_1 = 0, \\ \gamma_2 = \frac{\alpha_4}{2} \alpha_2^{-\frac{5}{2}}, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Donc la fonction y qui satisfait l'équation (60) sera de la forme

$$(77) \quad y = \frac{1}{2} + \gamma_0(x - \alpha_0)^{\frac{1}{2}} + \dots,$$

sa valeur critique $y = \frac{1}{2}$ correspondant ainsi à un point de ramification algébrique du second degré; résultat qui s'accorde d'ailleurs avec l'expression de la fonction (62) ou de la fonction [62].

On remarquera maintenant que $\gamma_0 = \pm \sqrt{2 \frac{\beta_0}{\alpha_0}}$ ne dépend pas du paramètre λ ; alors aux environs du point singulier $y = \frac{1}{2}$, le développement (77) représentera suffisamment la fonction $y = z$ de (48), fonction qui coïncide avec l'intégrale de l'équation (60) pour $\lambda = 1$; pourvu toutefois qu'on ait

$$(78) \quad 0 = \frac{1}{2} + \gamma_0(-\alpha_0)^{\frac{1}{2}} + \dots,$$

ce qui établit une relation de condition entre les arbitraires α_0, β_0 .

Nous arrivons maintenant à l'objet que nous avons en vue plus haut, à savoir (*Comptes rendus*, 13 mars 1911): la détermination d'une valeur asymptotique des coefficients c des fonctions (48); coefficients qui, d'après ce qui précède, satisfont à l'équation

$$(79) \quad c_{\pm j} = \sum_1^{j-1} c_{\pm i} c_{\mp j \pm i} + \frac{\lambda}{j^2} \sum_0^{j-1} c_i c_{j-i-1} \quad (c_j = c_{-j}).$$

Nous appliquerons pour cela la méthode de M. Darboux concernant l'approximation des fonctions de très grands nombres; voir à ce sujet son Mémoire (1) et les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* (t. I, Chap. VI, n° 93) de M. Poincaré.

Nous trouverons alors pour la partie principale de $c_{\pm j}$ l'expression suivante

$$(80) \quad c_{\pm j} = \frac{-\sqrt{-2\beta_0}}{\alpha_0^j \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} j^{-\frac{3}{2}},$$

l'erreur commise étant de l'ordre de $j^{-\frac{5}{2}}$.

(1) *Journal de Mathématiques*, 3^e série, t. IV, 1^{re} Partie.

D'ailleurs, d'après la formule bien connue

$$\Gamma(x) \Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x \sin \pi x},$$

ayant $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$, car $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, il vien t

$$(81) \quad c_{\pm j} = \frac{j^{-\frac{3}{2}}}{\alpha_0^j} \sqrt{\frac{-\beta_0}{2\pi}}.$$

En ce qui concerne α_0 , β_0 , ces quantités doivent satisfaire à l'équation (78), c'est-à-dire

$$(82) \quad 0 = \frac{1}{2} + \gamma_0(-\alpha_0)^{\frac{1}{2}} - \frac{\alpha_4}{2\alpha_2} \gamma_0^3(-\alpha_0)^{\frac{3}{2}} + \dots$$

Mais puisque, dans le voisinage du point singulier considéré, la fonction $y = z$ de (48) pourra être représentée par le développement (77) limité à des termes d'un rang inférieur, nous allons regarder comme nuls tous les coefficients γ à partir de γ_2 ; avec le même ordre d'erreur, vu (76), cela revient à annuler α_4 . Alors l'équation (82) se réduira à celle-ci

$$0 = \frac{1}{2} + \gamma_0(-\alpha_0)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - (-\alpha_0)^{\frac{1}{2}} \left(2 \frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)^{\frac{1}{2}},$$

donnant $\beta_0 = -\frac{1}{8}$; et nous aurons α_0 par l'équation $\alpha_4 = 0$, c'est-à-dire, d'après (73), par la suivante

$$0 = 1 - 2\beta_2 = 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_0}{\beta_0} \left(c_1 + \frac{9}{4}\lambda\right),$$

laquelle, avec $\beta_0 = -\frac{1}{8}$, donne

$$(83) \quad \alpha_0 = \frac{1}{4c_1 + 9\lambda}.$$

Donc, d'après (81), nous aurons

$$(84) \quad c_{\pm j} = \frac{(4c_1 + 9\lambda)^j}{4j\sqrt{\pi j}} \quad (j \geq 2).$$

Il est d'ailleurs évident qu'avec $\lambda = 0$ dans l'équation (79), on

retombe sur la solution génératrice de tout à l'heure (62). En une première approximation, on pourra donc s'en tenir à $\lambda = 0$; et alors, avec les valeurs $\beta_0 = -\frac{1}{8}$ et, d'après (83), $\alpha_0 = \frac{1}{4c_1}$, nous aurons l'expression

$$(85) \quad c_{\pm j} = \frac{c_1^j 4^{j-1}}{j \sqrt{\pi j}} \quad (j \geq 2).$$

V.

Dans ce qui précède, nous avons formé une équation majorante pour j grand, de telle sorte que les coefficients numériques se prêtent plus aisément au calcul. En outre, nous nous sommes bornés aux termes principaux, c'est-à-dire indépendants de m . Maintenant, tout en conservant cette restriction, nous allons chercher une majorante plus approchée, les valeurs de j restant cette fois intactes.

Reprenons donc les équations (40). Après avoir divisé chaque membre par Δ_j , la transformation (44) donnera

$$\begin{aligned} c_{\pm j} = & \sum_{|i| < j} \frac{u_{\pm j, \pm i}}{\Delta_j} c_{\pm i} c_{\mp j \pm i} m^{2h_0} + \sum_{|i| > j} \frac{u_{\pm j, \pm i}}{\Delta_j} c_{\pm i} c_{\mp j \pm i} m^{2h_0} \\ & + \frac{u_{\pm j}}{\Delta_j} \sum_i c_{\pm i} c_{\mp j \mp i-1} m^{2h_{\pm 1}} + \frac{v_{\pm j}}{\Delta_j} \sum_i c_{\pm i} c_{\mp j \mp i-1} m^{2h''_{\pm 1}}. \end{aligned}$$

Et en développant, vu (41) et (III), ces équations peuvent encore s'écrire

$$\begin{aligned} (86) \quad c_{\pm j} = & \sum_1^{j-1} \frac{u_{\pm j, \pm i}}{\Delta_j} c_{\pm i} c_{\mp j \pm i} + \frac{K''_{\pm 1}}{\Delta_j} \sum_0^{j-1} c_i c_{j-i-1} \\ & + \sum_1^{\infty} \frac{u_{\pm j, \mp i}}{\Delta_j} c_{\mp i} c_{\mp j \pm i} m^{4i} + \sum_{j+1}^{\infty} \frac{u_{\pm j, \pm i}}{\Delta_j} c_{\pm i} c_{\pm i \mp j} m^{4(i-j)} \\ & + \frac{K'_{\pm 1}}{\Delta_j} \sum_{j+1}^{\infty} c_{-i} c_{i-j-1} m^{4(i-j)} + m^4 \frac{K'_{\pm 1}}{\Delta_j} \sum_0^j c_{-i} c_{-j+i-1} \\ & + m^4 \frac{K'_{\pm 1}}{\Delta_j} \sum_1^{\infty} c_i c_{-j-i-1} m^{4i} + \frac{K''_{\pm 1}}{\Delta_j} \sum_1^{\infty} c_{-i} c_{j+i-1} m^{4i} \\ & + m^4 \frac{K''_{\pm 1}}{\Delta_j} \sum_j^{\infty} c_i c_{-i+j-1} m^{4(i-j)}, \end{aligned}$$

où nous avons posé

$$K'_1 = v_j, \quad K'_{-1} = u_{-j}, \quad K''_1 = u_j, \quad K''_{-1} = v_{-j},$$

les fonctions $u_{j,i}$, u_j , v_j étant données par (4), n° I.

Conservons seulement les termes principaux. D'après (4), il viendra alors, avec $\lambda = 1$,

$$(87) \quad c_{\pm j} = \sum_1^{j-1} \frac{i}{j} \left[\frac{4(j-i)(j \mp q)}{\Delta_j} - 1 \right] c_{\pm i} c_{\mp j \pm i} - \frac{3\lambda}{16j^2} \frac{\theta_{\pm 1}}{\Delta_j} \sum_0^{j-1} c_i c_{j-i-1},$$

où

$$(88) \quad \begin{cases} \theta_1 = 4j^2 - 4j(1+q) - s, \\ \theta_{-1} = 20j^2 + 4j(5q-1) + s, \\ q = 1 + p, \quad s = 2 + 8p + 9p^2. \end{cases}$$

Les équations (87) seront traitées comme plus haut, c'est-à-dire qu'en partant des formules (48), nous aurons d'abord, avec un paramètre arbitraire λ , qui aura finalement la valeur 1,

$$(89) \quad \begin{aligned} \sum_1^{\infty} c_{\pm j} x^j &= \sum_1^{\infty} x^j \sum_1^{j-1} \frac{i}{j} \left[\frac{4(j-i)(j \mp q)}{\Delta_j} - 1 \right] c_{\pm i} c_{\mp j \pm i} \\ &\quad - \frac{3\lambda}{16} \theta_{\pm 1} \sum_1^{\infty} \frac{x^j}{j^2 \Delta_j} \sum_0^{j-1} c_i c_{j-i-1}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'équation relativement aux signes supérieurs des indices; en multipliant par $j^2 \Delta_j$ nous aurons

$$(90) \quad \begin{aligned} \sum_1^{\infty} j^2 \Delta_j c_j x^j &= 4 \sum_1^{\infty} j(j-q) x^j \sum_1^{j-1} i(j-i) c_i c_{-j+i} \\ &\quad - \sum_1^{\infty} j x^j \Delta_j \sum_1^{j-1} i c_i c_{-j+i} - \frac{3\lambda}{16} \sum_1^{\infty} \theta_1 x^j \sum_0^{j-1} c_i c_{j-i-1}. \end{aligned}$$

Or d'après (48) nous avons, en différentiant,

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} j(j-1) c_j x^{j-2} &= y'' = \sum_1^{\infty} j^2 c_j x^{j-2} - \sum_1^{\infty} j c_j x^{j-2} \\ &= \sum_1^{\infty} j^2 c_j x^j = x^2 y'' + \sum_1^{\infty} j c_j x^j, \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_1^{\infty} (8j^2 + \Delta_0) c_j x^j = \Delta_0 y + 8x^2 y'' + 8x \sum_1^{\infty} j c_j x^{j-1},$$

c'est-à-dire

$$(91) \quad \sum_1^{\infty} \Delta_j c_j x^j = \Delta_0 y + 8xy' + 8f_1 \equiv F_1 \quad (f_1 = x^2 y'');$$

mais de là, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} j \Delta_j c_j x^{j-1} &= F'_1, \\ \sum_1^{\infty} j(j-1) \Delta_j c_j x^{j-2} &= F''_1 = \sum_1^{\infty} j^2 \Delta_j c_j x^{j-2} - \sum_1^{\infty} j \Delta_j c_j x^{j-2}, \end{aligned}$$

d'où

$$(92) \quad \sum_1^{\infty} j^2 \Delta_j c_j x^j = x^2 F''_1 + x F'_1,$$

c'est-à-dire l'expression du premier membre de (90).

Quant à son second membre, nous avons d'abord

$$y' z' = 1.1 c_1 c_{-1} x^0 + (1.2 c_1 c_{-2} + 2.1 c_2 c_{-1}) x^1 + \dots = \sum_2^{\infty} x^{j-2} \sum_1^{j-1} i(j-i) c_i c_{-j+i},$$

d'où

$$\sum_2^{\infty} x^j \sum_1^{j-1} i(j-i) c_i c_{-j+i} = x^2 y' z';$$

mais, puisque pour $j = 1$ on ne peut avoir ici que $i = 0$, car dans la sommation de la forme $\sum c_{\pm i} c_{\mp j \pm i}$ nous savons que i doit être *différent* de j , nous pourrons écrire

$$(93) \quad \sum_1^{\infty} x^j \sum_1^{j-1} i(j-i) c_i c_{-j+i} = x^2 y' z' = \psi \equiv \sum_1^{\infty} x^j S,$$

avec

$$S = \sum_1^{j-1} i(j-i) c_i c_{-j+i},$$

le terme initial du développement du premier membre de (93) étant nul.

Mais, en différentiant, il vient

$$\sum_1^{\infty} j x^{j-1} \mathbf{S} = \psi',$$

$$\sum_1^{\infty} j(j-1) x^{j-2} \mathbf{S} = \psi'' = \sum_1^{\infty} j^2 x^{j-2} \mathbf{S} - \sum_1^{\infty} j x^{j-2} \mathbf{S},$$

d'où

$$\sum_1^{\infty} j^2 x^j \mathbf{S} = x^2 \psi'' + \sum_1^{\infty} j x^j \mathbf{S};$$

et de là nous avons

$$4 \sum_1^{\infty} j^2 x^j \mathbf{S} - 4 \sum_1^{\infty} q j x^j \mathbf{S} = 4 x^2 \psi'' + 4(1-q) \sum_1^{\infty} j x^j \mathbf{S}$$

ou bien

$$(94) \quad 4 \sum_1^{\infty} j(j-q) x^j \sum_1^{j-1} i(j-i) c_i c_{-j+i} = 4 x^2 \psi'' + 4(1-q) x \psi' = \Psi_1,$$

c'est-à-dire l'expression du premier terme du second membre de (90).

Puis, nous avons

$$zy' = 1 c_1 c_{-1} x^1 + (2 c_2 c_{-1} + 1 c_1 c_{-2}) x^2 + \dots = \sum_2^{\infty} x^{j-1} \sum_1^{j-1} i c_i c_{-j+i},$$

ou bien, pour une même raison que plus haut,

$$(95) \quad \sum_1^{\infty} x^j \sum_1^{j-1} i c_i c_{-j+i} = x z y' = \varphi_1 = \sum_1^{\infty} x^j \mathbf{S}.$$

Alors, en différentiant, il vient

$$\sum_1^{\infty} j x^{j-1} \mathbf{S} = \varphi_1',$$

$$\sum_1^{\infty} j^2 x^{j-2} \mathbf{S} - \sum_1^{\infty} j x^{j-2} \mathbf{S} = \varphi_1'',$$

d'où

$$(96) \quad \sum_1 \Delta_j x^j S = \Delta_0 \varphi_1 + 8x \varphi'_1 + 8x^2 \varphi''_1 \equiv \Phi_1,$$

et par différentiation nous aurons

$$(97) \quad - \sum_1 j \Delta_j x^j \sum_1^{j-1} i c_i c_{-j+i} = -x \Phi'_1,$$

c'est-à-dire l'expression du deuxième terme du second membre de (90).

Enfin nous avons

$$\sum_1^{\infty} x^j \sum_0^{j-1} c_i c_{j-i-1} = c_0 x^1 + (c_0 c_1 + c_1 c_0) x^2 + 2 \sum_3^{\infty} x^j c_0 c_{j-1} + \sum_3^{\infty} x^j \sum_1^{j-2} c_i c_{j-i-1};$$

et comme on a

$$2 \sum_3^{\infty} x^j c_{j-1} = 2 \sum_2^{\infty} x^{j+1} c_j = 2x \sum_2^{\infty} c_j x^j = 2x(y - c_1 x),$$

en tenant compte de (52), il viendra, avec $c_0 = 1$,

$$(98) \quad \sum_1^{\infty} x^j \sum_0^{j-1} c_i c_{j-i-1} = x(1+y)^2 = \chi \equiv \sum_1^{\infty} x^j S;$$

mais de là nous obtenons en différentiant

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} j x^{j-1} S &= \chi', \\ \sum_1^{\infty} j^2 x^{j-2} S &= \chi'' + \sum_1^{\infty} j x^{j-2} S = \chi'' + \frac{1}{x} \chi', \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} 4j^2 x^j S &= 4x^2 \chi'' + 4x \chi', & \sum_1^{\infty} -4(1+q)j x^j S &= -4(1+q)x \chi', \\ \sum_1^{\infty} -s x^j S &= -s \chi, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(99) \quad \sum_1^{\infty} [4j^2 - 4(1+q)j - s] x^j S = -s\chi - 4qx\chi' + 4x^2\chi'' \equiv H_1,$$

et par conséquent

$$(100) \quad -\frac{3\lambda}{16} \sum_1^{\infty} \theta_1 x^j \sum_0^{j-1} c_i c_{j-i-1} = -\frac{3\lambda}{16} H_1,$$

qui n'est autre que l'expression du troisième terme du second membre de (90).

Donc, d'après (92), (94), (97) et (100), l'équation (90) sera

$$(101) \quad xF_1' + x^2F_1'' = \Psi_1 - x\Phi_1' - \frac{3\lambda}{16} H_1,$$

où nous avons d'après (91)

$$(102) \quad \begin{cases} F_1 = \Delta_0 y + 8x(y' + xy''), & xF_1' = (\Delta_0 + 8)xy' + 24x^2y'' + 8x^3y''', \\ x^2F_1'' = (\Delta_0 + 32)x^2y'' + 40x^3y''' + 8x^4y^{IV}; \end{cases}$$

et

$$(103) \quad \begin{cases} \psi = x^2y'z', & \psi' = 2xy'z' + x^2(y'z'' + y''z'), \\ \psi'' = 2y'z' + 4x(y'z'' + y''z') + x^2(y'z''' + 2y''z'' + y'''z'), \\ \Psi_1 = 8(1-p)x^2y'z' + 4(4-p)x^3(y'z'' + y''z') + 4x^4(y'z''' + 2y''z'' + y'''z'); \end{cases}$$

d'après (95), (96),

$$(104) \quad \begin{cases} \varphi_1 = xzy', & \varphi' = y'(z + xz') + xzy'', \\ \varphi_1'' = y'(2z' + xz'') + 2y''(z + xz') + xzy''', \\ \Phi_1 = xy'[(\Delta_0 + 8)z + 24xz' + 8x^2z''] + 8x^2y''(3z + 2xz') + 8x^3zy''', \\ x\Phi_1' = xy'[(\Delta_0 + 8)z + (\Delta_0 + 56)xz' + 48x^2z'' + 8x^3z'''] \\ \quad + x^2y''[(\Delta_0 + 56)z + 96xz' + 24x^2z''] \\ \quad + 24x^3y'''(2z + xz') + 8x^4zy^{IV}; \end{cases}$$

et d'après (98), (99),

$$(105) \quad \begin{cases} \chi = x(1+y)^2, & \chi' = (1+y)(1+y+2xy'), \\ \chi'' = 2(1+y)(2y' + xy'') + 2xy'^2, \\ \frac{3\lambda}{16} H_1 = \frac{3\lambda}{16} x \{ (1+y)[-3(2+4p+3p^2)(1+y) \\ \quad + 8(1-p)xy' + 8x^2y''] + 8x^2y'^2 \}. \end{cases}$$

Pour l'équation (89) relativement aux signes *inférieurs* des indices, nous aurons à changer y en z dans f_1 de (91), c'est-à-dire dans F_1 ; à permuter entre eux y et z dans ψ de (93) et φ_1 de (95), c'est-à-dire dans Ψ_1 et Φ_1 ; à y changer q en $-q$, ou bien $-p$ en $2+p$; à remplacer H_1 par

$$(106) \quad H_2 = 20x^2\chi'' + 4(5q + 4)x\chi' + s\chi.$$

Nous aurons ainsi

$$(107) \quad \begin{cases} F_2 = \Delta_0 z + 8x(z' + xz''), \\ xF_2' = (\Delta_0 + 8)xz' + 24x^2z'' + 8x^3z''', \\ x^2F_2'' = (\Delta_0 + 32)x^2z'' + 40x^3z''' + 8x^4z^{IV}, \end{cases}$$

puis

$$(108) \quad \begin{cases} \Psi_2 = 8(3+p)x^2z'y' + 4(6+p)x^3(z'y'' + z''y') + 4x^4(z'y''' + 2z''y'' + z'''y'), \\ \Phi_2 = xz'[(\Delta_0 + 8)y + 24xy' + 8x^2y''] + 8x^2y''(3y + 2xy') + 8x^3yz''', \\ x\Phi_2' = xz'[(\Delta_0 + 8)y + (\Delta_0 + 56)xy' + 48x^2y'' + 8x^3y'''] \\ \quad + x^2z''[(\Delta_0 + 56)xy' + 96xy'' + 24x^2y'''] \\ \quad + 24x^3z'''(2y + xy') + 8x^4yz^{IV}, \end{cases}$$

puis enfin

$$(109) \quad \frac{3\lambda}{16}H_2 = \frac{3\lambda}{16}x\{(1+y)[(38+28p+9p^2)(1+y) + 8(19+5p)xy' + 40x^2y''] + 40x^2y'^2\},$$

et l'équation analogue à (101)

$$(110) \quad xF_2' + x^2F_2'' = \Psi_2 - x\Phi_2' - \frac{3\lambda}{16}H_2.$$

Alors d'après les formules qui précèdent, en remarquant que

$$\Delta_0 + 8 = \Delta_1 = 6 - 4p + p^2,$$

et en supprimant le facteur commun x , les équations différentielles (101),

(110) seront

$$\begin{aligned}
 (111) \left\{ \begin{aligned}
 0 &= 8(1+z)x^3y^{iv} + 4[12(1+z) + 5xz']x^2y''' \\
 &\quad + [(54-4p+p^2)(1+z) + 4(20+p)xz' + 16x^2z'']xy'' \\
 &\quad + [(6-4p+p^2)(1+z) \\
 &\quad \quad + (46+4p+p^2)xz' + 4(8+p)x^2z'' + 4x^3z''']y' \\
 &\quad + \frac{3}{16}\lambda\{(1+y)[-3(2+4p+3p^2)(1+y) \\
 &\quad \quad + 8(1-p)xy' + 8x^2y''] + 8x^2y'^2\}, \\
 0 &= 8(1+y)x^3z^{iv} + 4[12(1+y) + 5xy']x^2z''' \\
 &\quad + [(54-4p+p^2)(1+y) + 4(18-p)xy' + 16x^2y'']xz'' \\
 &\quad + [(6-4p+p^2)(1+y) \\
 &\quad \quad + (30-12p+p^2)xy' + 4(6-p)x^2y'' + 4x^3y''']z' \\
 &\quad + \frac{3}{16}\lambda\{(1+y)[(38+28p+9p^2)(1+y) \\
 &\quad \quad + 8(19+5p)xy' + 40x^2y''] + 40x^2y'^2\}.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de remplacer ce système par une équation majeure.

Pour former une telle équation, nous allons nous servir d'un principe nouveau, très simple, pouvant s'appliquer précisément aux équations différentielles où le théorème d'existence de Cauchy se trouve en défaut.

Soit, en effet, une équation différentielle ordinaire d'ordre $n+1$ entre la variable x et une fonction y de x . D'abord si nous posons $x = e^t$, avec $t > 0$ ou $t < 0$, nous arrivons à une équation de la forme

$$\frac{du_n}{dt} + k_1 u_n + k_2 u_{n-1} + \dots + k_{n+1} y = f,$$

où f dépendra en général de t et des fonctions de t : $y, u_1, \dots, u_n$ telles que

$$\frac{dy}{dt} = u_1, \quad \dots, \quad \frac{du_{n-1}}{dt} = u_n;$$

$k_1, \dots, k_{n+1}$ étant des coefficients numériques.

Puis, avec x comme variable indépendante, nous aurons

$$(a) \quad x \frac{du_n}{dx} + k_1 u_n + \dots + k_{n+1} y = f,$$

où f dépend de x et, de la même façon que plus haut, des fonctions de x : $y, u_1, \dots, u_n$, ayant cette fois

$$(a') \quad x \frac{dy}{dx} = u_1, \quad \dots, \quad x \frac{du_{n-1}}{dx} = u_n.$$

Nous supposerons f holomorphe aux environs de $x = 0, y = 0$ et $u = 0$. Alors ayant formé le développement de f suivant les puissances croissantes de x, y, u et remplacé les coefficients numériques par leurs valeurs absolues, le nouveau développement définira, aux environs de $x = 0, y = 0$ et $u = 0$, une fonction F majorante à f ; c'est ce que nous exprimerons en écrivant $f \leq F$. De plus, admettons que f s'annule avec x, y et u ; il en sera de même de F .

Considérons maintenant l'équation

$$(b) \quad x \frac{du_n}{dx} + k_1 u_n + \dots + k_{n+1} y = F$$

ne différant de (a) que par son second membre. Si l'on cherche à satisfaire aux deux équations (a), (b) en posant

$$(c) \quad y = \sum_1^{\infty} c_j x^j,$$

on doit avoir, d'après (a'), avec $j = 1, 2, \dots, \infty$,

$$(c') \quad u_1 = \sum j c_j x^j, \quad \dots, \quad u_n = \sum j^n c_j x^j.$$

Soit alors $h_j x^j$ le terme général de f , celui de F étant $H_j x^j$; et de même, soit $\delta_j c_j x^j$ le terme général du premier membre des équations (a), (b).

En identifiant, nous aurons respectivement pour ces équations

$$c_j = \frac{h_j}{\delta_j}, \quad c_j = \frac{H_j}{\delta_j}.$$

Or si nous avons $\delta_j > 0$, il viendra

$$\frac{h_j}{\delta_j} < \frac{H_j}{\delta_j},$$

car $h_j < H_j$, ayant par hypothèse $f \leq F$. Donc, dans cette condition,

l'équation (b) sera majorante à (a). Et cette condition essentielle, nous pouvons l'écrire, d'après (c), (c'),

$$\delta_j = j^{n+1} + k_1 j^n + \dots + k_{n+1} > 0.$$

Posons maintenant

$$\delta'_j = \varepsilon j^{n+1} \quad (\varepsilon > 0);$$

et cherchons le nombre $\varepsilon > 0$ de façon que la fonction

$$(d) \quad \delta = \delta_j - \delta'_j = (1 - \varepsilon)j^{n+1} + k_1 j^n + \dots + k_{n+1}$$

soit constamment *positive* à partir de $j \geq 1$. La dérivée δ' étant de degré n , il y a deux cas : Si n est pair, on cherchera à disposer de ε de telle sorte que $\delta' = 0$ ait toutes ses racines imaginaires. Ainsi, après avoir identifié δ' tiré de (d) avec son expression : produit de facteurs tels que $(j - \alpha)^2 + \beta^2$, on aura toujours $\frac{n}{2}$ relations de la forme $\beta = \sqrt{\varphi}$, où φ dépendra de ε et $k_1, \dots, k_n$; d'où alors : les inégalités $\varphi > 0$, exprimant que les β sont réels ; et comme les nombres k sont connus, on trouvera aisément la valeur de ε pour laquelle ces inégalités soient remplies. Alors δ croîtra toujours de $j = 1$ à $j = \infty$; et si, en outre, nous avons $1 - \varepsilon + k_1 + \dots + k_{n+1} = \delta(1) > 0$, l'équation $\delta = 0$ n'aura aucune racine réelle dans l'intervalle $(1, \infty)$. Donc, dans ces conditions, δ sera positif pour $j \geq 1$, c'est-à-dire qu'on aura

$$(e) \quad \delta_j > \delta'_j = \varepsilon j^{n+1} > 0.$$

Si n est impair, $\delta' = 0$ aura au moins une racine réelle ; mais cette racine ne sera pas dans l'intervalle $(1, \infty)$ si l'on a $\delta'(1) > 0$. On imposera alors à ε , comme plus haut, une condition de non réalité des autres racines de $\delta' = 0$; et si, de plus, ces conditions sont compatibles avec $\delta(1) > 0$, δ sera toujours positif pour $j \geq 1$. Donc les inégalités (e) seront remplies.

C'est en cela que consiste le principe dont il s'agit ; c'est-à-dire à trouver les nombres ε qui réalisent les inégalités $\delta_j > \delta'_j > 0$. Et dans ce but, le choix de la fonction δ'_j peut être fait de bien des manières. Par exemple : $\delta'_j = \varepsilon j^n$, ou encore $\delta'_j = \varepsilon j^{n+1} - \varepsilon' j^n$. Maintenant, nous allons montrer comment cela permet de former des équations majorantes.

1° Supposons que nous ayons en effet $\delta_j > \delta'_j > 0$, avec $\delta'_j = \varepsilon j^{n+1}$, ε étant déterminé. Considérons le système auxiliaire

$$(F) \quad y = u_1 = \dots = u_n = Y,$$

ce qui revient à poser, d'après (c'),

$$(g) \quad Y = \sum j^n c_j x^j;$$

et soit Φ ce que devient F en vertu de (f). Le terme général du développement de F étant toujours $H_j x^j$, soit $H'_j x^j$ celui du développement de Φ effectuée avec (g).

Or H_j est un polynôme entier, dépendant des c , à coefficients numériques positifs, tandis que H'_j sera le même polynôme où les coefficients correspondants sont plus grands; donc $H_j < H'_j$, c'est-à-dire $F \leq \Phi$. D'autre part, on a évidemment

$$\varepsilon x \frac{dY}{dx} = \varepsilon \sum j^{n+1} c_j x^j = \sum \delta'_j c_j x^j.$$

Alors l'équation différentielle

$$[b] \quad \varepsilon x \frac{dY}{dx} = \Phi$$

sera une majorante à (b); en effet, en identifiant, il viendra respectivement pour les équations (b) et [b]

$$c_j = \frac{H_j}{\delta_j}, \quad c_j = \frac{H'_j}{\delta'_j};$$

et puisque $\delta'_j > \delta_j > 0$, $H'_j > H_j$ par ce qui précède, il est clair que l'inégalité

$$(h) \quad \frac{H_j}{\delta_j} < \frac{H'_j}{\delta'_j}$$

sera remplie.

2° Dans le cas de $\delta'_j = \varepsilon j^n$, au lieu de [b] nous aurons l'équation *finie*

$$[b'] \quad \varepsilon Y = \Phi,$$

comme majorante à (b) , si nous admettons $\delta_j > \delta'_j > 0$, car l'inégalité (h) sera alors remplie. Cette équation d'ailleurs est majorante même à $[b]$, que le δ'_j de celle-ci est plus grand que δ'_j de $[b']$.

3° Avec $\delta'_j = \varepsilon j^{n+1} - \varepsilon' j^n$, l'équation majorante à (b) , dans les mêmes conditions, sera

$$(b'') \quad \varepsilon x \frac{dY}{dx} - \varepsilon' Y = \Phi.$$

Cela posé, reprenons les équations différentielles (III). En y faisant d'abord $z = y$, nous aurons deux équations en y et x , lesquels, avec $x = e^t$, $t > 0$, $\frac{dy}{dt} = u_1$, $\frac{du_1}{dt} = u_2$, $\frac{du_2}{dt} = u_3$ deviennent

$$\begin{aligned} \frac{du_3}{dt} &= \frac{1}{8} \left(2 + 4p - p^2 - \frac{3\lambda}{2} e^t \right) u_2 + \frac{3\lambda}{16} e^t p u_1 + \frac{9\lambda e^t}{16 \cdot 8} (2 + 4p + 3p^2) (1 + y) \\ &\quad + \frac{1}{8} \left(2 + 4p - p^2 - \frac{3\lambda}{2} e^t \right) \frac{u_1^2}{1 + y} - \frac{1 + p}{1 + y} u_1 u_2 - \frac{2}{1 + y} u_2^2 - \frac{3}{1 + y} u_1 u_3, \\ \frac{du_3}{dt} &= \frac{1}{8} \left(2 + 4p - p^2 - \frac{15\lambda}{2} e^t \right) u_2 - \frac{3\lambda(14 + 5p)}{16} e^t u_1 - \frac{3\lambda e^t}{16 \cdot 8} (38 + 28p + 9p^2) (1 + y) \\ &\quad + \frac{1}{8} \left(2 + 4p - p^2 - \frac{15\lambda}{2} e^t \right) \frac{u_1^2}{1 + y} + \frac{1 + p}{1 + y} u_1 u_2 - \frac{2}{1 + y} u_2^2 - \frac{3}{1 + y} u_1 u_3. \end{aligned}$$

Puis, avec x comme variable indépendante, on les mettra sous la forme (a)

$$(III) \quad x \frac{du_3}{dx} - \frac{1}{8} (2 + 4p - p^2) u_2 = f,$$

ayant donc

$$n = 3, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = -\frac{1}{8} (2 + 4p - p^2), \quad k_3 = 0, \quad k_4 = 0;$$

et au lieu de (a') nous aurons

$$(III) \quad x \frac{dy}{dx} = u_1, \quad x \frac{du_1}{dx} = u_2, \quad x \frac{du_2}{dx} = u_3.$$

Les deux équations (III) ne diffèrent donc que par leurs seconds

membres f qui se composent respectivement des termes

$$(114) \left\{ \begin{array}{ll} A'x = \frac{9\lambda}{16.8}(2+4p+3p^2)x, & -\frac{3\lambda}{16.8}(38+28p+9p^2) = -Ax, \\ & A'xy, \quad -Axy, \\ & \frac{3\lambda}{16}pxu_1, \quad -\frac{3\lambda(14+5p)}{16}xu_1, \\ & -\frac{3\lambda}{16}xu_2, \quad -\frac{15\lambda}{16}xu_2, \\ & -\frac{3\lambda}{16}x\frac{u_1^2}{1+y}, \quad -\frac{15\lambda}{16}x\frac{u_1^2}{1+y}, \\ & -\frac{1+p}{1+y}u_1u_2, \quad \frac{1+p}{1+y}u_1u_2; \end{array} \right.$$

et des trois suivants qui sont communs

$$(115) \quad \frac{1}{8}(2+4p-p^2)\frac{u_1^2}{1+y}, \quad -\frac{2}{1+y}u_2^2, \quad -\frac{3}{1+y}u_1u_3.$$

L'équation (b) sera alors

$$(116) \quad x \frac{du_3}{dx} - \frac{1}{8}(2+4p-p^2)u_2 = F,$$

où F est formé de f en remplaçant $\frac{1}{1+y}$ par $\frac{1}{1-y}$, après avoir rendu positifs les coefficients numériques et pris le plus grand parmi ceux qui se correspondent. De cette façon $f \leq F$ et, par conséquent, l'équation (116) est majorante à (112).

Si nous considérons $\delta'_j = \varepsilon j^3$, l'équation (d) sera

$$\delta_j - \delta'_j = (1-\varepsilon)j^3 - \frac{1}{2}(2+4p-p^2)j^2 = 0.$$

Une racine évidente est $j^2 = 0$; nous pouvons la laisser de côté, car elle se trouve en dehors de l'intervalle $(1, \infty)$. Alors ce qu'il nous faut, c'est que le polynome

$$\theta = (1-\varepsilon)j^3 - \frac{1}{8}(2+4p-p^2) \quad (\delta := \theta j^2)$$

ne soit pas négatif pour $j \geq 1$. Mais pour cela, tant que p restera dans

l'intervalle $(0, 1)$, il est clair qu'il suffit de prendre

$$1 - \varepsilon = \frac{1}{8}(2 + 4p - p^2),$$

c'est-à-dire $\varepsilon = \frac{1}{8}(6 - 4p + p^2)$; et avec notre symbole Δ_j , ayant

$$6 - 4p + p^2 = \Delta_1,$$

il vient $\varepsilon = \frac{\Delta_1}{8}$. Donc alors l'équation $[b]$

$$\frac{\Delta_1}{8} x \frac{dY}{dx} = \Phi$$

sera majorante à (116). Et à celle-ci, nous avons, comme il a été montré plus haut, la majorante algébrique $[b']$

$$(117) \quad \frac{\Delta_1}{8} Y = \Phi;$$

cette équation, en effet, s'obtient de la même façon que la précédente en considérant $\delta'_j = \varepsilon j^3$.

D'ailleurs, vu les notations (114), (115) et (f) permettant de passer de f à F , puis de F à Φ , nous aurons

$$(118) \quad \Phi = Ax + axY + (a' + a''x) \frac{Y^2}{1 - Y},$$

ou

$$(119) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{3\lambda}{16.8} (38 + 28p + 9p^2), \\ a = \frac{3}{16.8} (190 + 68p + 9p^2), \\ a' = \frac{1}{8} (50 + 12p - p^2), \\ a'' = \frac{15\lambda}{16} \quad (\lambda = 1). \end{array} \right.$$

Nous nous contenterons de l'équation (117). Mais si l'on satisfait aux équations différentielles (111) par les développements (48), n° 4, on obtiendra pour les premiers coefficients

$$(120) \quad c_{+1} = \frac{9\lambda}{16} \frac{2 + 4p + 3p^2}{6 - 4p + p^2}, \quad c_{-1} = -\frac{3\lambda}{16} \frac{38 + 28p + 9p^2}{6 - 4p + p^2};$$

et il est clair que $|c_{-1}| > c_{+1}$; alors, vu (119), nous avons

$$\Lambda = \frac{6-4p+p^2}{8} |c_{-1}| = \frac{\Delta_1}{8} c_1,$$

ayant ici pris la valeur $c_1 = |c_{-1}|$, comme majorante aux $c_{\pm 1}$.

D'autre part, vu (118), on aura une majorante à Φ si l'on y remplace les coefficients a, a', a'' par a' , celui-ci étant le plus grand. Alors toutes réductions faites, l'équation

$$(121) \quad Y = c_1 x + \frac{8}{\Delta_1} a' (x + Y) \frac{Y}{1 - Y}$$

sera majorante à (117); donc aussi à (116) et aux deux équations (112).

Ensuite, elle est majorante à l'équation $x \frac{dY}{dx} = Y$ qui remplace le système (113) en vertu de (f); car l'intégrale de celle-ci n'est pas autre chose que $Y = c_1 x$. Finalement donc l'équation (121) est majorante à nos équations (111).

Maintenant le but que nous nous proposons au commencement de ce numéro serait atteint si l'on pouvait arriver à une limite convenable des $c_{\pm j}$. Il y a là cependant une difficulté à surmonter.

VI.

Si l'on cherche en effet à satisfaire à l'équation (121) par la série

$$(122) \quad Y = \sum_1^{\infty} \beta_j x^j,$$

on aura des formules de récurrence telles que

$$(123) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = c_1, \\ \beta_2 = \varepsilon' a' \beta_1 + \varepsilon' a' \beta_1^2, \\ \dots\dots\dots, \\ \beta_j = P_j(a', \varepsilon', \beta_1, \dots, \beta_{j-1}), \end{array} \right.$$

où P_j est un polynome entier en β à coefficients positifs; $\varepsilon' = \frac{8}{\Delta_1}$.

Mais, d'après la façon dont ces coefficients se présentent comme mul-

tiples de $\varepsilon' a' > 8$, dans ces formules, il est aisé de voir que les β_j augmentent rapidement avec j . On peut juger de l'effet de cette croissance en évaluant une limite approchée du cercle de convergence. En résolvant l'équation algébrique (121) on trouve, pour la solution qui s'annule avec x ,

$$Y = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4A c_1 x}}{2A},$$

où $A = 1 + \varepsilon' a'$, $B = 1 - (\varepsilon' a' - c_1)x$. On voit de là que cette solution est holomorphe aux environs de $x = 0$; et il en est de même alors des fonctions (48) qui satisfont aux équations (111). Le cercle de convergence est défini par

$$B^2 - 4A c_1 x = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\varepsilon' a' - c_1)^2 x_0^2 - 2[c_1 + \varepsilon' a'(1 + 2c_1)]x_0 + 1 = 0,$$

et le calcul numérique conduit, pour $p \geq 0$, à la valeur $x_0 \approx \frac{1}{20}$, comme limite approchée du rayon de ce cercle. Mais la petitesse de ce rayon nous fait conclure que la fonction (122), définie par l'équation (120), est une majorante trop étendue pour les intégrales de (111); et par conséquent que ses coefficients β_j donnés par (123) sont des limites supérieures trop grandes pour les coefficients $c_{\pm j}$.

Pour cette raison, nous allons chercher une majorante plus serrée. A l'appui de ce fait, nous prendrons les formules de récurrence (123). Elles donnent une première indication sur les limites que nous cherchons; en passant aux nombres on constate, en effet, que le coefficient général β_j , c'est-à-dire la limite supérieure des $c_{\pm j}$, est de l'ordre de $\left(\frac{3}{16}\lambda\right)^j$. Alors cette limite est de la forme

$$(124) \quad c_{\pm j} = \left(\frac{3\lambda}{16}\right)^j e_j.$$

Cela posé, nous remarquerons que l'équation (87) ne diffère de la suivante

$$(87') \quad c_{\pm j} = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{i}{j} \left[\frac{4(j-i)(j \mp q)}{\Delta_j} - 1 \right] c_{\pm i} c_{\mp j \pm i} - \frac{3\lambda}{16j^2} \frac{\theta_{\pm 1}}{\Delta_j} \sum_{i=0}^j c_i c_{j-i},$$

que par les termes en λ . Mais cette partie des $c_{\pm j}$ dépendant de λ est de l'ordre de j^{-2} , tandis que la première partie est de l'ordre de j^{-1} . Si alors, au delà d'une certaine valeur de j , la première partie des $c_{\pm j}$ peut devenir prépondérante, soit dans (87), soit dans (87'), il y aura avantage à nous servir de son expression approchée, pour former la majorante plus *restreinte* dont nous avons besoin. Cherchons donc ce qui se passe, lorsque j varie de 0 à ∞ .

Considérons d'abord l'équation (87'). Si nous faisons la transformation (124), nous aurons finalement

$$(125) \quad e_j = \sum_1^{j-1} \left[\frac{4ij(j-i)(j \mp q) - ij\Delta_j - \frac{3\lambda}{16}\theta_{\pm 1}}{j^2\Delta_j + \frac{3}{8}\lambda\theta_{\pm 1}} \right] e_i e_{j-i},$$

le dénominateur ne dépendant pas de i ; $\theta_{\pm j}$ et q étant donnés par (88).

Proposons-nous de majorer cette équation transformée, afin d'arriver à une majorante absolue. Par le mot *absolue* j'entends la majorante la plus étendue possible. Envisageons pour cela le coefficient de $e_i e_{j-i}$. Sa variation dans l'intervalle $1 \leq i \leq j-1$ ne dépend que de celle de la fonction

$$(126) \quad 4ij(j-i)(j \mp q) - ij\Delta_j - \frac{3\lambda}{16}\theta_{\pm 1},$$

où j sera d'abord regardé comme constant. Mais les valeurs du paramètre $p = q - 1$ ne nous intéressent ici que dans un intervalle restreint : $(0, 1)$, avec $j \geq 2$. Dans ces conditions, on trouve sans peine que la valeur de i qui annule la dérivée de la fonction (126) en i est < 1 et correspond à un maximum; de sorte que de 1 à $j-1$, la fonction (126), négative dans cet intervalle, ne peut que décroître, sa dérivée étant elle-même négative; et il est clair que sa plus grande valeur *absolue* aura lieu pour $i = j-1$. Alors, avec cette valeur absolue maximum, au lieu de (125) nous aurons finalement, avec correspondance du double signe, ces deux équations :

$$(127) \quad e_j = \Lambda_{\pm 1} \sum_1^{j-1} e_i e_{j-i},$$

où

$$A_1 = \frac{8j^4 - 12j^3 + \left(6 + p^2 + \frac{3\lambda}{4}\right)j^2 - \left(2 + \frac{3\lambda}{4}p + p^2 + \frac{3\lambda}{2}\right)j - \frac{3\lambda}{16}(2 + 8p + 9p^2)}{8j^4 - \left(2 + 4p - p^2 - \frac{3\lambda}{2}\right)j^2 - \frac{3\lambda}{2}(2 + p)j - \frac{3\lambda}{8}(2 + 8p + 9p^2)},$$

$$A_{-1} = \frac{8j^4 - 12j^3 + \left(\frac{15}{4}\lambda - 2 - 8p + p^2\right)j^2 + \left[6 - 3\lambda + \left(8 + \frac{15}{4}\lambda\right)p - p^2\right]j + \frac{3\lambda}{16}(2 + 8p + 9p^2)}{8j^4 - \left(\frac{15}{2}\lambda - 2 - 4p + p^2\right)j^2 + \lambda\left(6 + \frac{15}{2}p\right)j + \frac{3\lambda}{8}(2 + 8p + 9p^2)}.$$

On remarquera de suite que, pour j *grand*, nous avons $A_1 = A_{-1} = 1$, de telle sorte que les équations (127) se réduisent à l'équation unique

$$(128) \quad e_j = \sum_{i=1}^{j-1} e_i e_{j-i},$$

laquelle s'obtient, d'ailleurs, en faisant $\lambda = 0$ dans l'équation

$$e_j = \sum_{i=1}^{j-1} e_i e_{j-i} + \frac{\lambda}{j^2} \sum_{i=0}^{j-1} e_i e_{j-i-1}.$$

Mais celle-ci n'est pas autre chose qu'une majorante commune aux équations

$$e_{\pm j} = \sum_{i=1}^{j-1} e_{\pm i} e_{\mp j \pm i} + \frac{\lambda}{j^2} \sum_{i=0}^{j-1} e_i e_{j-i-1}$$

pour j *grand*, puisqu'elles sont les mêmes que les équations (79). Or, de l'équation

$$(128') \quad c_j = \sum_{i=1}^{j-1} c_i c_{j-i} + \frac{\lambda}{j^2} \sum_{i=0}^{j-1} c_i c_{j-i-1},$$

qui est une majorante commune aux équations (79), nous connaissons déjà une solution asymptotique (84). Par conséquent (85) et une solution asymptotique de (128) vu qu'elle correspond à $\lambda = 0$ dans (128').

Mais ce n'est pas tout. Reprenons les équations (127) et examinons la variation des coefficients $A_{\pm 1}$. Ce sont maintenant, avec $i = j - 1$,

des fonctions de j qu'on peut écrire sous la forme

$$(129) \quad \Lambda_{\pm 1} = \frac{j^4 - \frac{3}{2}j^3 + a''_{\pm 1}j^2 + a'_{\pm 1}j \mp \frac{1}{2}b_0}{j^4 + b''_{\pm 1}j^2 + b'_{\pm 1}j \mp b_0},$$

les a, b dépendant des paramètres λ, p , ou bien de p seulement, car, n'ayant plus d'intérêt à conserver λ comme paramètre, nous lui rendons sa valeur 1. Cherchons d'abord s'il existe des valeurs de j pour lesquelles $\Lambda_{\pm 1} > 1$; ces valeurs doivent alors satisfaire aux inégalités

$$(130) \quad 3j^2 - 2(a''_{\pm 1} - b'_{\pm 1})j - 2(a'_{\pm 1} - b_{\pm 1}) < \pm \frac{b_0}{j};$$

or, leurs premiers membres, étant *minima* pour

$$(131) \quad j = \frac{1}{3}(a''_{\pm 1} - b'_{\pm 1}),$$

vont augmenter pour des valeurs de j supérieures à celles-ci; tandis que, en valeur absolue, les seconds membres vont décroître; donc, pour certaines valeurs de j , suffisamment grandes, les inégalités (130) peuvent cesser d'exister. En effet, vu les expressions des a, b ,

$$\begin{aligned} a'_1 &= -\frac{1}{8}\left(\frac{7}{2} + \frac{3}{4}p + p^2\right), & a'_{-1} &= \frac{1}{8}\left(3 + \frac{47}{4}p - p^2\right), \\ b'_1 &= -\frac{3}{8}\left(1 + \frac{p}{2}\right), & b'_{-1} &= \frac{1}{8}\left(6 + \frac{15}{2}p\right), \\ a''_1 &= \frac{1}{8}\left(\frac{27}{2} + p^2\right), & a''_{-1} &= \frac{1}{8}\left(\frac{7}{5} - 8p + p^2\right), \\ b''_1 &= -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} + 4p - p^2\right), & b''_{-1} &= -\frac{1}{8}\left(\frac{11}{2} - 4p + p^2\right), \\ & & b_0 &= \frac{3}{64}(2 + 8p + 9p^2), \end{aligned}$$

les valeurs (131) seront

$$(132) \quad j = \frac{29}{96} + \frac{1}{6}p^2, \quad j = \frac{29}{96} - \frac{1}{2}p + \frac{1}{12}p^2;$$

avec ces valeurs de j , au lieu de (130) nous aurons respectivement

$$\begin{aligned} -\left(\frac{29}{16} + p^2\right)\left[\frac{457}{32} + p(47 - 24p + 16p^2 - 8p^3)\right] &< 144 + 576p + 648p^2, \\ \left(\frac{29}{8} - 6p + p^2\right)\left[\frac{1463}{32} - p\left(15 - \frac{125}{2}p + 24p^2 - 2p^3\right)\right] &< -(108 + 432p + 48p^2). \end{aligned}$$

Mais, tant que $0 \leq p < 1$, il est clair que la dernière de ces inégalités n'est jamais possible; et par conséquent la deuxième des inégalités (130) ne pourra exister pour aucune valeur de j . Au contraire, la première de ces inégalités étant possible pour ces valeurs de p , il s'ensuit, d'après (132), qu'elle aura toujours lieu pour $\frac{29}{96} \leq j \leq \frac{45}{96}$. Pour des valeurs de j un peu plus grandes que $\frac{45}{96}$ elle existe encore. Ainsi, pour $j = 1$ ayant $78 - 100p - 11p^2 < 0$, on pourra évidemment y satisfaire avec des valeurs de $p > 0$; mais pour $j = 2$, on trouvera l'inégalité impossible avec $p \leq 1$: $1082 - 304p + 5p^2 < 0$. Pour des valeurs de j un peu plus petites que $\frac{29}{96}$, notre inégalité peut avoir lieu également, d'après ce qui précède; mais aux environs de $j = 0$, elle cessera d'exister. Ainsi, avec $j = 0$, elle se réduit à l'inégalité

$$2 - 3p + 4p^2 < 0,$$

encore impossible avec $p \leq 1$.

Nous devons donc conclure, sous la restriction $0 \leq p \leq 1$:

Que $A_{-1} > 1$ n'est possible pour aucune valeur de j ;

Que $A_1 > 1$ n'a lieu que dans l'intervalle $0 < j < 2$.

On trouve d'ailleurs en effectuant, de proche en proche, le calcul numérique de l'expression (129) que $A_1 > 1$ a lieu seulement dans l'intervalle plus restreint $\frac{1}{3} < j < \frac{3}{2}$; mais là, A_1 peut devenir très grand. Cette circonstance arrivera dans le cas de $j = 1$, où l'on a

$$A_1 = \frac{1}{2} \frac{27p^2 + 36p + 18}{19p^2 + 68p - 30},$$

chaque fois que p se trouve voisin de la racine positive du dénominateur comprise, évidemment, entre 0 et 1. Seulement ce cas doit être écarté, car avec des valeurs de j inférieures à $\frac{3}{2}$, nous sommes en dehors de l'intervalle exigé par nos équations (87) : j devant être un entier *au moins* égal à 2. Alors, $A_{\pm 1} \leq 1$. Et comme $A_{\pm 1} = 1$ pour $j = \infty$, à ce

maximum des $A_{\pm 1}$ correspondra l'équation (128), c'est-à-dire

$$(133) \quad c_j = \sum_{i=1}^{j-1} c_i c_{j-i}$$

admettant (85) comme solution asymptotique (*Comptes rendus*, 16 octobre 1911).

Telle est donc la forme de notre équation cherchée, majorante à (88'), pour $j \geq 2$. Par là nous entendons que, lorsqu'on fait successivement $j = 2, 3, \dots$, dans ces équations, la valeur de c_j de (133) est plus grande que la valeur de c_j donnée par (87').

Il s'agit de voir maintenant dans quelles conditions l'équation (133) sera aussi majorante à l'équation (87). Soit f ce que devient le second membre de (87), après avoir fait partout $c_{-j} = c_{+j}$, en prenant les coefficients numériques les plus grands avec leurs valeurs absolues; et pour cela nous prendrons θ_{-1} au lieu de $-\theta_{\pm 1}$ car, vu (88), on a $|\theta_{\pm 1}| < \theta_{-1}$. Alors il est clair que (133) sera majorante à (87), dès qu'on pourra avoir

$$(134) \quad \sum_{i=1}^{j-1} c_i c_{j-i} > F = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha'_i c_i c_{j-i} + \alpha_j \sum_{i=1}^{j-1} c_i c_{j-i-1},$$

ou

$$(135) \quad \begin{cases} \alpha'_j = \frac{i}{j} \left[1 - \frac{4(j-i)(j-q)}{\Delta_j} \right], \\ \alpha_j = \frac{3\lambda}{16j^2} \frac{\theta_{-1}}{\Delta_j}, \end{cases}$$

puisque F est majorante au second membre de (87); et cette inégalité doit être vérifiée par toutes les valeurs des c tirées de (133). On peut d'ailleurs l'écrire

$$\sum_{i=1}^{j-1} [1 - \alpha'_i] c_i c_{j-i} > 3 \alpha_j c_{j-1},$$

car on a évidemment, vu aussi (133),

$$\sum_{i=0}^{j-1} c_i c_{j-i-1} = 2c_{j-1} + \sum_{i=1}^{j-2} c_i c_{j-i-1} = 3c_{j-1} \quad (j \geq 3).$$

Pour $j = 2$, nous remarquerons que le second membre $3c_{j-1}$ doit être remplacé par $2c_{j-1} = 2c_1$.

D'autre part, le second membre de (133) étant homogène, on voit, en procédant par récurrence avec $j = 2, 3, \dots$, que l'expression générale de c_j est de l'ordre de c_1^j ; alors nous pouvons poser $c_j = k_j c_1^j$, et l'inégalité qui précède deviendra finalement

$$(136) \quad c_1 > 3\alpha_j \frac{k_{j-1}}{\sum_{i=1}^{j-1} [1 - \alpha'_i] k_i k_{j-i}} = \varepsilon_j \quad (j \geq 3),$$

ε_j désignant ici, pour abréger, le second membre. Pour $j = 2$ il faudra comme nous avons dit plus haut, remplacer $3\alpha_j$ par $2\alpha_j = 2\alpha_2$. Mais la valeur de c_1 doit être une majorante aux $c_{\pm 1}$, les premiers coefficients des développements (48), n° III de y et z qui satisfont aux équations différentielles (111). Les valeurs de ces coefficients sont données par (120); et l'on remarquera qu'elles sont précisément les valeurs *initiales* de Hill de (5) n° I, avec une erreur de l'ordre de m^4 ; elles sont d'ailleurs bien déterminées puisque nos fonctions y, z sont holomorphes aux environs de $x = 0$.

Comme $c_{+1} > 0$ et $c_{-1} < 0$, pour toutes les valeurs du paramètre p , nous pourrions donc prendre soit $c_1 = c_{+1}$, soit $c_1 = |c_{-1}|$.

Montrons d'abord que ε_j décroît lorsque j augmente. En effet, sous les conditions $0 \leq p \leq 1$, $1 \leq i \leq j-1$, $j \geq 2$, nous avons, vu (135) et (88),

$$\alpha'_i < \frac{i}{j} \leq \frac{j-1}{j}, \quad \alpha_j < \frac{6}{5j^2},$$

car $\Delta_j = 8j^2 - 2 - 4p + p^2 > 4(j-i)(j-q)$, dans les mêmes conditions, q étant $1+p$; alors $3\alpha_j < \frac{18}{5j^2}$, $1 - \alpha'_i < \frac{1}{j}$, de sorte que

$$(137) \quad \varepsilon_j < \frac{18}{5j} \frac{k_{j-1}}{\sum_{i=1}^{j-1} k_i k_{j-i}} = \frac{18}{5j} \frac{k_{j-1}}{k_j} \quad (j \geq 3).$$

Maintenant il suffit de montrer qu'à partir d'une certaine valeur de j nous avons $k_{j-1} < k_j$. Cela est vrai en effet pour $j = 3, 4$; car nous

obtenons par (133) $k_2 = 1$, $k_3 = 2$, $k_4 = 5$. Admettons alors ce fait jusqu'à une valeur déterminée de j ; nous aurons à l'établir pour les valeurs supérieures. Mais, comme cette valeur de j pourra être paire ou impaire, nous considérerons les trois valeurs successives $j = 2h$, $2h + 1$, $2h + 2$. Alors, vu (133),

$$c_j = c_1 c_{j-1} + c_2 c_{j-2} + \dots + c_{j-2} c_2 + c_{j-1} c_1;$$

nous aurons, avec $c_j = k_j c_1^j$, pour les trois valeurs de j

$$\begin{aligned} k_{2h} &= 2[k_{2h-1} + k_2 k_{2h-2} + \dots + k_{h-1} k_{h+1}] + k_h^2, \\ k_{2h+1} &= 2[k_{2h} + k_2 k_{2h-1} + \dots + k_{h-1} k_{h+2}] + 2k_h k_{h+1}, \\ k_{2h+2} &= 2[k_{2h+1} + k_2 k_{2h} + \dots + k_{h-1} k_{h+3}] + 2k_h k_{h+2} + k_{2h+1}^2, \end{aligned}$$

et la comparaison des seconds membres conduit évidemment à $k_{2h} < k_{2h+1} < k_{2h+2}$; c'est-à-dire, d'une manière générale, $k_{j-1} < k_j$ pour $j \geq 3$. Donc ε_j décroît à partir de $j \geq 3$, et cela plus vite que $\frac{1}{j}$, car il en est de même, par ce qui précède, du second membre de (137).

Faisons $j = 2$ dans (136). Dans ce cas $i = 1$, avec $k_1 = 1$ et nous devons, comme il a été dit plus haut, remplacer $3\alpha_j$ par $2\alpha_2$; alors, vu (135) et (88), le calcul donnera

$$(138) \quad \varepsilon_2 = \frac{3}{16} \frac{114 + 48p + 9p^2}{34 - 8p + p^2}.$$

En faisant $j = 3$ dans (136), on a $i = 1, 2$ avec $k_1 = k_2 = 1$; et il viendra cette fois, vu les formules (135), (88),

$$(138') \quad \varepsilon_3 = \frac{3}{16} \frac{230 + 68p + 9p^2}{242 - 28p + 3p^2}.$$

Ces résultats sont suffisants pour comparer les ε_j à $c_1 = |c_{-1}|$

$$[120] \quad c_1 = \frac{3}{16} \frac{38 + 28p + 9p^2}{6 - 4p + p^2}.$$

En effet, pour $0 \leq p$, il est clair que $c_1 > \varepsilon_2$; et comme $\varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \dots$ car, d'après ce qui précède, les ε_j vont en décroissant, nous devons conclure que l'inégalité (136) est remplie à partir de $j \geq 2$.

Si maintenant nous prenons $c_1 = c_{+1}$, c'est-à-dire

$$[120'] \quad c_1 = \frac{9}{16} \frac{2 + 4p + 3p^2}{6 - 4p + p^2},$$

la même inégalité (136) sera remplie à partir de $j \geq 3$, car on trouve $c_1 > \varepsilon_3 > \dots$; mais pour $j = 2$, on voit que cela n'est plus vrai tant que p demeure aux environs de zéro.

C'est là une circonstance qui peut bien se présenter, même avec $c_1 = |c_{-1}|$, lorsque, au lieu de (87), on aurait à envisager des équations plus complètes de (86), n° V. Afin de faire disparaître cette difficulté, on aura recours à un coefficient k multipliant le second membre de (133).

Dans le cas où nous sommes, cela revient, pour $j = 2$, à poser $c_2 = kc_1^2$, ayant à déterminer k par (134) qui devient cette fois

$$k \sum_1^{j-1} c_i c_{i-j} > F \quad (j = 2), \quad j$$

c'est-à-dire par l'inégalité $c_1 > \frac{2\alpha_2}{k - \alpha_1'}$ avec c_1 donné par [120']. On trouvera ainsi, pour la plus petite valeur compatible avec $0 \leq p \leq 1$, la valeur $k = \frac{7}{3}$. Et il est clair qu'on peut encore écrire $c_2 = c_1'^2$, où $c_1' = c_1 \sqrt{\frac{7}{3}}$.

Par conséquent, à l'aide de la formule $c_j = \sum_1^{j-1} c_i c_{j-i}$ et c_1 de [120], l'inégalité (134) $c_j > F$ conduit à $c_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \dots$, ce qui veut dire que c_j est une limite supérieure aux $c_{\pm j}$ de (87), pour $j \geq 2$. A l'aide de la formule $c_j' = \sum_1^{j-1} c_i' c_{j-i}'$, $c' = c_1 \sqrt{\frac{7}{3}}$, et c_1 de [120'], l'inégalité $c_j' > F$ donnera $c_1 > \varepsilon_2' > \varepsilon_3' \dots$, ayant $\varepsilon_j' < \varepsilon_j$; c'est-à-dire que c_j' sera une limite supérieure aux mêmes coefficients $c_{\pm j}$ à partir de $j \geq 2$.

Telles sont les considérations qu'il s'agissait de préciser pour nous assurer du choix de (133) comme majorante à (87). Maintenant, voici une autre remarque.

Toute équation différentielle qui se rattache aux équations du type

bilinéaire de Hill, par les fonctions (48), n° IV, a son ordre égal au degré maximum de j dans les coefficients des inconnues $c_{\pm j}$.

De ce fait il en sera encore question au numéro suivant. Pour le moment, nous voulons montrer qu'il peut servir à la recherche de majorantes algébriques. D'après cela, en effet, toute équation telle que (87), où il n'y aura pas de j variable dans ses coefficients, doit nous conduire, non plus à une équation différentielle, mais à une équation *finie*. Ainsi, les coefficients de (87) étant

$$-\frac{i}{j} \left[1 - \frac{4(j-i)(j \mp 1 \mp p)}{\Delta_j} \right] < 1 \quad (1 \leq i \leq j-1),$$

$$-\frac{3}{16j^2} \frac{\theta_{\pm 1}}{\Delta_j} < \frac{3}{64} \frac{114 + 48p + 9p^2}{30 - 4p + p^2} \leq \lambda \quad (\lambda = 1),$$

pour toutes les valeurs de $j = 2, 3, \dots, \infty$, avec $0 \leq p \leq 1$, l'équation

$$[87] \quad c_j = \sum_{i=1}^{j-1} c_i c_{j-i} + \lambda \sum_{i=0}^{j-1} c_i c_{j-i-1}$$

sera une majorante à (87); seulement cette fois, ses coefficients numériques ne dépendent plus de j , étant constants. Alors, moyennant la fonction

$$[48] \quad y = \sum_{i=1}^{j-1} c_j x^j,$$

il vient d'abord

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} x^j \sum_{i=1}^{j-1} c_i c_{j-i} + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} x^j \sum_{i=0}^{j-1} c_i c_{j-i-1},$$

et puis, ayant en vertu de [48], avec $c_0 = 1$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^j \sum_{i=1}^{j-1} c_i c_{j-i} = y^2 + c_1 x,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^j \sum_{i=0}^{j-1} c_i c_{j-i-1} = x + 2c_1 x + 2 \sum_{i=3}^{\infty} x^j c_{j-1} + \sum_{i=3}^{\infty} x^j \sum_{i=1}^{j-1} c_i c_{j-i-1},$$

$$\sum_{i=3}^{\infty} x^j c_{j-1} = \sum_{i=2}^{\infty} x^{j+1} c_j = x \sum_{i=2}^{\infty} c_j x^j = x(y - c_1 x),$$

$$\sum_{i=3}^{\infty} x^j \sum_{i=1}^{j-2} c_i c_{j-i-1} = xy^2,$$

on obtiendra, toutes réductions faites, cette équation majorante finie

$$y^2 - y + c_1 x + \lambda x(1 + y)^2 = 0.$$

Or, notre formule (133) s'obtient en faisant $\lambda = 0$ dans [87] de tout à l'heure; nous aurons donc de là l'équation

$$(139) \quad y^2 - y + c_1 x = 0,$$

à laquelle satisfait la série précédente [48]. Et nous arriverons plus aisément, à l'aide de cette équation, que par la formule (133), à la valeur de c_j en fonction de c_1 . En effet, la solution qui s'annule avec x , à savoir : $y = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4c_1 x})$ conduit, par différentiations successives, en vertu de la formule de Maclaurin, au résultat

$$c_j = \frac{1}{j!} \frac{1.3.5 \dots [2(j-2)+1]}{2^{j-1}} (4c_1)^j$$

qu'on peut encore écrire

$$(140) \quad c_j = 2 \frac{[2(j-2)+1]!}{j! (j-2)!} c_1^j.$$

Telle est donc la valeur de c_j , majorante aux $c_{\pm j}$, données par les équations de Hill (86) bornées à la forme (87), dont l'erreur commise est de l'ordre de m^4 . D'ailleurs, il est aisé de voir que cette valeur est *inférieure* à $\frac{c_1^j}{j} 4^{j-1}$. On pourra donc prendre

$$(140') \quad c_j = \frac{c_1^j}{j} 4^{j-1},$$

ce qui, par la transformation $a_j = m^{2j} c_j$, revient à

$$a_j = \frac{a_1^j}{j} 4^{j-1}$$

pour avoir, avec le même degré d'approximation, une limite supérieure aux coefficients des inégalités variationnelles secondaires.

Enfin, comme la formule (140) procède du développement

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

qui satisfait à l'équation (139), la formule

$$c_j = 2 \frac{[2(j-2)+1]!}{j!(j-2)!} \left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{j}{2}} c_1^j$$

provient évidemment du développement

$$Y = c_1 \sqrt{\frac{7}{3}} x + \frac{7}{3} c_1^2 x^2 + \dots$$

qui satisfait à l'équation $Y^2 - Y + c_1 \sqrt{\frac{7}{3}} x = 0$. Mais si, dans le premier, nous remplaçons $c_2 = c_1^2$ par $\frac{7}{3} c_1^2$, la série obtenue

$$Z = c_1 x + \frac{7}{3} c_1^2 x^2 + \dots$$

sera encore, d'après ce qui précède, une majorante aux séries $\sum_1^{\infty} c_{\pm j} x^j$ qui satisfont aux équations différentielles (111), et l'on vérifie aisément qu'elle satisfait à

$$Z^2 - Z + c_1 x + \frac{4}{3} c_1^2 x^2 = 0.$$

Quant à son rayon de convergence x_0 , il est donné par

$$\frac{16}{3} c_1^2 x_0^2 + 4 c_1 x_0 - 1 = 0,$$

tandis que celui de la série Y est $x'_0 = \frac{1}{4c_1} \sqrt{\frac{3}{7}}$; et l'on voit de suite que $x'_0 < x_0$. Donc, la fonction Z est une majorante plus *restreinte* que Y .

VII.

Une autre question maintenant est de savoir la nature des singularités de nos équations différentielles.

Considérons d'abord l'équation

$$(141) \quad c_j = \alpha \frac{j^h + \dots}{j^k + \dots} \sum_1^{j-1} c_j c_{j-1},$$

d'une forme plus générale que (133), où α désigne un paramètre arbitraire,

$$\frac{j^h + \dots}{j^k + \dots}$$

étant le rapport de deux polynômes entiers en j de degrés h, k dont les coefficients dépendent du paramètre p . Si nous posons

$$[48] \quad y = \sum_1^{\infty} c_j x^j,$$

il viendra

$$(142) \quad \sum_1^{\infty} x^j \sum_1^{j-1} c_i c_{j-i} = x c_1 + y^2 \quad (c_0 = 1);$$

et en différentiant, nous aurons

$$(143) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^{\infty} j^k c_j x^j = x^k y^{(k)} + \sum_1^{h-1} \beta_s x^s y^{(s)}, \\ \sum_1^{\infty} j^h x^j \sum_1^{h-1} c_i c_{j-i} = x c_1 + 2 y x^h y^{(h)} + y \sum_1^{h-1} \gamma_{r,0} x^r y^{(r)} + \dots + x^\varepsilon y^{(\varepsilon)} \sum_1^{h-\varepsilon} \gamma_{r,\varepsilon} x^r y^{(r)}, \end{array} \right.$$

les coefficients β, γ étant des entiers positifs, avec $\varepsilon = \frac{h}{2}$ ou $\frac{h-1}{2}$, suivant que h sera pair ou impair. Alors ayant d'après (141)

$$(144) \quad \sum_1^{\infty} (j^k + \dots) c_j x^j = \alpha \sum_1^{\infty} (j^h + \dots) x^j \sum_1^{h-1} c_i c_{j-i},$$

d'après (143) nous aurons l'équation différentielle,

$$(145) \quad 0 = x^k y^{(k)} - 2 \alpha y x^h y^{(h)} + \dots,$$

où nous écrivons seulement les termes d'ordre le plus élevé renfermant aussi les plus grandes puissances de x . Maintenant, si $h < k$, l'équation (145) pourra s'écrire

$$0 = x^k y^{(k)} + \dots$$

Si $h > k$, elle sera

$$0 = -2 \alpha y x^h y^{(h)} + \dots$$

Si $h = k$, on aura

$$(146) \quad 0 = (1 - 2\alpha y)x^h y^{(h)} + \dots$$

Ainsi, en dehors de la singularité $x = 0$ appartenant à tous ces cas, nous voyons que $y = 0$ et $1 - 2\alpha y = 0$ sont des singularités propres aux deux derniers cas respectivement. Quant à la nature de ces singularités, elle ne dépend évidemment pas de j . On pourra dès lors s'en rendre compte en considérant des équations *approchées* aux précédentes pour certaines valeurs particulières de j ; et, dans le cas présent, il y aura avantage à faire j *grand*. On arrivera ainsi pour $h \geq k$ à la conclusion que la singularité $x = 0$ correspond à un point de ramification qui, généralement, est de la nature d'un *foyer*, et que y s'y annule sous certaines conditions dépendant de p . Mais le cas de $h = k$ est particulièrement intéressant. D'après (141), pouvant écrire en effet

$$\sum_1^{\infty} j^h (1 + \dots) c_j x^j = \alpha \sum_1^{\infty} j^h (1 + \dots) x^j \sum_1^{j-1} c_i c_{j-i},$$

on en déduit pour j grand l'équation approchée

$$\sum_1^{\infty} c_j x^j = \alpha \sum_1^{\infty} x^j \sum_1^{j-1} c_i c_{j-i},$$

donnant, d'après [48] et (142),

$$y = \alpha c_1 x + \alpha y^2;$$

d'où

$$(147) \quad y = \frac{1}{2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 - c_1 x}.$$

Nous avons donc là une solution approchée très simple de la fonction y qui satisfait à l'équation différentielle (140), pour $h = k$, nous indiquant la nature de la singularité $1 - 2\alpha y = 0$ de cette équation. Il existe par conséquent une solution y qui s'annule pour $x = 0$, ayant $1 - 2\alpha y = 0$ pour une certaine valeur de x voisine de la valeur $\frac{1}{4\alpha c_1}$ qui correspond à un point de ramification algébrique.

Or, l'équation (146) renferme évidemment, par sa forme générale, l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction [48], c_j étant défini par (133). A son tour cette fonction est, comme nous avons vu, une majorante aux fonctions y, z de la forme (48), n° IV, qui satisfont aux équations différentielles (111); et après avoir multiplié ces équations par x , le terme qui fournit leurs singularités est précisément de la même forme que celui qui donne les singularités dans l'équation (146), où il suffira, du reste, de prendre $h = 4$, $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Il y a donc là un rapprochement entre nos équations permettant de donner une première indication sur la nature des points critiques qui sont communs à ces équations, ou bien encore sur la nature des singularités définies, pour chaque équation différentielle, par un système d'équations finies équivalentes.

Mais ici la question peut se traiter directement. La difficulté était seulement de choisir une variable indépendante; et nous l'avons surmontée, après avoir fait

$$1 + y = Y, \quad 1 + z = Z,$$

en prenant comme variable indépendante

$$\frac{d^2 x}{dY^2} = t.$$

De cette façon, ayant

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dY} &= \frac{dx}{dt} \left(\frac{dY}{dt} \right)^{-1} \equiv x' Y'^{-1}, & \frac{dZ}{dY} &= Z_1 Y'^{-1}, & \frac{d^2 Z}{dY^2} &= Z_2 Y'^{-3}, \\ \frac{d^3 x}{dY^3} &= Y'^{-1}, & \frac{d^4 x}{dY^4} &= -Y'^{-3} Y'', & \frac{d^3 Z}{dY^3} &= Z_3 Y'^{-5}, & \frac{d^4 Z}{dY^4} &= Z_4 Y'^{-7}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z', & Z_2 &= Z'' Y' - Z' Y'', & Z_3 &= Z''' Y'^2 - 3 Z'' Y' Y'' + Z' (3 Y''^2 - Y' Y'''), \\ Z_4 &= Z^{(4)} Y'^3 - 6 Z''' Y'^2 Y'' + Z'' Y' (15 Y''^2 - 4 Y' Y''') + Z' (-15 Y''^3 + 10 Y' Y'' Y''' - Y'^2 Y^{(4)}), \end{aligned}$$

les équations (111), après avoir pris d'abord Y comme variable indé-

pendante, se ramènent à celles-ci :

$$(148) \quad 0 = 8Zx^3(-15t^3Y'^8 + 10tx'Y'^6 + x'^2Y'^3Y'') + 48Zx^2x'^2(3t^2Y'^6 - x'Y'^4) \\ - AZxx'^4tY'^4 + 20Z_1x^3x'(3t^2Y'^6 - x'Y'^4) - B_1Z_1x^3x'^3tY'^4 \\ - 16Z_1x^3x't(Z_2x'Y'^3 - Z_1tY'^6) + CZx'^6Y'^2 + D_1Z_1xx'^5Y'^2 \\ + E_1x^2x'^3(Z_2x'Y' - Z_1tY'^4) \\ + 4x^3x'[Z_3x'^2 - 3Z_2x'tY'^2 + Z_1(3t^2Y'^6 - x'Y'^4)] \\ + \lambda F_1Y^3x'^7Y' + \lambda G_1Yxx'^6Y'^2 - \frac{3}{2}\lambda Yx^2tx'^4Y'^4 + \frac{3}{2}\lambda x^2x'^5Y'^3,$$

$$(149) \quad 0 = 8Yx^3[Z_4x'^3 - 6Z_3x'^2tY'^3 + Z_2x'(15t^2Y'^6 - 4x'Y'^4) \\ + Z_1(-15t^3Y'^9 + 10tx'Y'^7 + x'^2Y'^4Y'')] \\ + 48Yx^2x'^2[Z_3x'^2Y' - 3Z_2x'tY'^4 + Z_1(3t^2Y'^8 - x'Y'^6)] \\ + AYxx'^4(Z_2x'Y'^2 - Z_1tY'^5) \\ + 20x^3x' [Z_3x'^2Y'^2 - 3Z_2x'tY'^5 + Z_1(3t^2Y'^8 - x'Y'^6)] \\ + B_2x^2x'^3(Z_2x'Y'^3 - Z_1tY'^6) \\ - 16x^3x't (Z_2x'Y'^5 - Z_1tY'^8) + CYZ_1x'^6Y'^3 \\ + D_2Z_1xx'^5Y'^4 - E_2Z_1x^3x'^3Y'^6 \\ + 4Z_1x^3x'(3t^2Y'^8 - x'Y'^6) + \lambda F_2Y^2x'^7Y'^3 \\ + \lambda G_2Yxx'^6Y'^4 - \frac{15}{2}\lambda Yx^2x'^4Y'^6 + \frac{15}{2}\lambda x^2x'^5Y'^5,$$

où

$$\begin{aligned} A &= 54 - 4p + p^2, & B_1 &= 4(20 + p), & D_1 &= 46 + 4p + p^2, \\ E_1 &= 4(8 + p), & F_1 &= -\frac{9}{16}(2 + 4p + 3p^2), & G_1 &= \frac{3}{2}(1 - p), \\ C &= 6 - 4p + p^2, & B_2 &= 4(18 - p), & D_2 &= 30 - 12p + p^2, \\ E_2 &= 4(6 - p), & F_2 &= \frac{3}{16}(38 + 28p + 9p^2), & G_2 &= \frac{3}{2}(19 + 5p). \end{aligned}$$

A ces équations nous allons satisfaire, après avoir tenu compte des expressions qui précèdent de Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 , par des développements de la forme

$$(150) \quad \begin{cases} x = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots, \\ Y = \beta_0 + \beta_1 t + \dots, \\ Z = \gamma_0 + \gamma_1 t + \dots, \end{cases}$$

en faisant, du reste, $\lambda = 1$ dans les formules de récurrence entre les α, β, γ .

Pour obtenir ces formules, nous avons à considérer d'abord les

termes en t^0 , dans les équations qui précèdent, c'est-à-dire

$$x'^2(8Zx^3Y^{13}Y'' - 24Z_1x^3Y^{14}) + x'^3(\quad),$$

$$x'^2(-8.4Yx^3Z_2Y^{13} + 8Yx^3Z_1Y^{13}Y'' - 24x^3Z_1Y^{15}) + x'^3(\quad),$$

et vu la présence du facteur x'^2 , nous aurons les relations

$$\alpha_1 = 0, \quad 8\alpha_0^3\beta_1^3 \cdot 2\beta_2\gamma_0 - 24\alpha_0^3\beta_1^4\gamma_1 = 0,$$

$$-8.4\alpha_0^3\beta_0\beta_1^3(2\beta_1\gamma_2 - 2\beta_2\gamma_1) + 8\alpha_0^3\beta_0\beta_1^3 \cdot 2\beta_2\gamma_1 - 24\alpha_0^3\beta_1^5\gamma_1 = 0,$$

qui donnent $\beta_1 = 0$, d'où alors les relations suivantes

$$8\alpha_0^3 \cdot 2\beta_2\gamma_0 = 0,$$

$$40\alpha_0^3\beta_0 \cdot 2\beta_2\gamma_1 = 0,$$

donnant $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$.

Écrivons encore une fois nos équations (148) et (149) en indiquant, d'après ces valeurs, le plus petit degré en t de chaque terme :

[148] $0 = -4.3x^3x'^3(Z''Y'Y'' - Z'Y''^2),$ degré 4,
 $+ 4x^3x'^3(Z'''Y'^2 - Z'Y'Y'''),$ » 5,
 $+ E_1x^3x'^4(Z''Y'^2 - Z'Y'Y''),$ » 6,
 $+ 8x^3x'^2(ZY^{13}Y'' - 3Z'Y^{14}),$ » 7,
 $- 28x^3x'^2t(Z''Y^{14} - Z'Y^{13}Y''),$ » »

[149] $0 = 8.15x^3x'^3(Z''YY'Y''^2 - Z'YY''^3),$ degré 6,
 $- 20.3x^3x'^3(Z''Y^{13}Y'' - Z'Y'^2Y''^2),$ » »
 $- 8.2x^3x'^3(3Z'''YY'^2Y'' + 2Z''YY'^2Y''' - 5Z'YY'Y''Y'''),$ » 7,
 $+ 20x^3x'^3(Z'''Y^{14} - Z'Y^{13}Y'''),$ » »
 $+ 8x^3x'^3(Z^{14}YY'^3 - Z'YY'^2Y^{14}),$ » 8,
 $- 48.3x^2x'^4(Z''YY'^2Y'' - Z'YY'Y''^2),$ » »
 $+ B_2x^2x'^4(Z''Y^{14} - Z'Y^{13}Y''),$ » »
 $- 8.63x^3x'^2t(Z''YY'^4Y'' - Z'YY'^3Y''^2),$ » 9,
 $- 8.4x^3x'^2(Z''YY'^5 - Z'YY'^4Y''),$ » »
 $+ 8x^3x'^2Z'YY'^4Y'',$ » »
 $+ 48x^2x'^4(Z'''YY'^3 - Z'YY'^2Y'''),$ » »
 $- 20.3x^3x'^2t(Z''Y^{16} - Z'Y^{15}Y''),$ » »
 $- 24x^3x'^2Z'Y^{16},$ » »
 $- 16x^3x'^2t(Z''Y^{16} - Z'Y^{15}Y''),$ » »

Les termes non écrits ont leur plus petit degré égal à 8 dans l'équation [148] et à 10 dans l'équation [149]; ce sont d'ailleurs des termes dont nous n'aurons pas besoin.

Alors les termes en t^4 et t^6 des équations [148] et [149] respectivement se détruisent.

Les termes en t^5 et t^6 de [148] et ceux en t^7 de [149] donneront

$$\gamma_3\beta_2 - \gamma_2\beta_3 = 0.$$

Les termes en t^8 de [149] se détruisent encore; mais les termes en t^7 de [148] et ceux en t^9 de [149] donnent respectivement, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned} 15\alpha_2\beta_2(\gamma_5\beta_2 - \gamma_2\beta_5) + 6\alpha_2\beta_2(\gamma_4\beta_3 - \gamma_3\beta_4) \\ - 36\alpha_2\beta_3(\gamma_4\beta_2 - \gamma_2\beta_4) - 20\gamma_2\beta_2^2 = 0, \\ 6\alpha_2\beta_2(\gamma_5\beta_2 - \gamma_2\beta_5) + 73.3\alpha_2\beta_2(\gamma_4\beta_3 - \gamma_3\beta_4) \\ - 54\alpha_2\beta_3(\gamma_4\beta_2 - \gamma_2\beta_4) + 5\gamma_2\beta_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Et il est clair qu'il est inutile d'aller plus loin. Cela suffit pour conclure que nos développements (150) sont

$$\begin{aligned} x &= \alpha_0 + \alpha_2 t^2 + \dots, \\ Y &= \beta_2 t^2 + \dots, \\ Z &= \gamma_2 t^2 + \dots \end{aligned}$$

Par inversion, nous aurons donc les développements de la forme

$$\begin{aligned} t &= \frac{d^2 x}{dY^2} = A_1(x - \alpha_0)^{\frac{1}{2}} + \dots, \\ 1 + y = Y &= B_1(x - \alpha_0)^{\frac{1}{2}} + \dots, \\ 1 + z = Z &= C_1(x - \alpha_0)^{\frac{1}{2}} + \dots, \end{aligned}$$

montrant que les singularités $1 + y = 0$, $1 + z = 0$ des fonctions y , z correspondent à un point de ramification algébrique, point qui est en dehors de l'origine, α_0 n'étant pas nul.

Ainsi, ce fait concernant la nature des singularités, rencontré également dans les majorantes qui nous ont servi à trouver une limite supérieure aux $c_{\pm j}$, est rigoureusement établi.

Vu et approuvé :

Paris, le 29 mai 1912.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 29 mai 1912.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

SECONDE THÈSE.



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Équations différentielles du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité.

Vu et approuvé :

Paris, le 29 mai 1912.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 29 mai 1912.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
50001 Quai des Grands-Augustins, 55
